

## ارائه یک مدل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد صفحات حلقوی تابعی هوشمند کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک براساس تئوری کلاسیک صفحات

فرزاد ابراهیمی<sup>۱</sup>، عباس راستگو<sup>۲</sup>  
arastgo@ut.ac.ir

پذیرش مقاله: ۸۹/۱۱/۲۶

دریافت مقاله: ۸۹/۰۸/۱۱

### چکیده

در تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات حلقوی نازک از جنس مواد تابعی (Functionally Graded Material) کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک براساس تئوری صفحات کرشلف ارائه شده است. مشخصات صفحه تابعی مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل‌دهنده در راستای ضخامت صفحه و میدان پتانسیل الکتریکی با یک تابع سینوسی طوری مدل شده است که معادله ماکسول ارضا شود. معادلات دیفرانسیل حرکت برای اولین بار به صورت تحلیلی برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی حل شده است. صحت روش تحلیلی ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه و نیز با نتایج روش المان محدود سه بعدی تایید شده است. در مطالعات عددی تاکید اصلی بر بررسی اثر تغییر شاخص گرادیان صفحه تابعی بر روی مشخصات ارتعاشات آزاد سازه مربوطه می‌باشد. پاسخ‌های تحلیلی و نتایج حاصل مدل ساده شده‌ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات ارتعاشی صفحات حلقوی ایزوتروپ کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک ارائه می‌دهد.

### کلید واژه:

صفحات حلقوی - مواد FGM - لایه‌های پیزوالکتریک - ارتعاشات آزاد - تئوری صفحات کرشلف

۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه تهران پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران  
۲- دانشیار، دانشگاه تهران پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران

## ۱- مقدمه

به تازگی رده جدیدی از مواد تحت عنوان مواد تابعی که در آنها خواص ماده به صورت تابعی پیوسته نسبت به مکان و به خصوص در راستای ضخامت در صفحات تغییر می‌کند، معرفی شده‌اند. این مفهوم در سال ۱۹۹۳ ابتدا در پی تلاش جهت رسیدن به موادی بسیار مقاوم در برابر گرما توسط کویزومی [۱] ارائه گردید. این مواد از دیدگاه میکروسکوپی غیرهمگن بوده و معمولاً از ترکیب فلز و سرامیک ساخته می‌شوند.

مواد مرکب لایه‌ای جهت استفاده در سازه‌های پیشرفته طراحی می‌شوند اما تغییرات تیز بین خواص هر لایه در سطح تماس دو لایه مجاور، باعث ایجاد تنش‌های برشی بین لایه‌های بسیار بزرگ و در نتیجه ناگهان منجر به پدیده جداشدگی لایه‌ها (Delamination) می‌گردد. این نقطه ضعف با ایجاد تغییرات پیوسته در خواص مواد همانند آنچه در مواد تابعی دیده می‌شود برطرف می‌گردد. همانطور که تیمور و همکاران [۲] با انجام یک تحلیل گرمایی- مکانیکی روی موادی که در دو جهت تغییر خواص تابعی داشتند نشان داد که با اینکار از پدیده جداشدگی لایه‌ها در مواد مرکب می‌توان پیشگیری نمود. بنابراین مواد تابعی می‌توانند قابلیت استفاده در سازه‌های پیشرفته را داشته باشد. تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله تحلیل کمانش [۳]، تحلیل دقیق تنش [۴ و ۵ و ۶]، تحلیل دینامیکی [۷ و ۸] و تحلیل غیرخطی ترموالاستیک سازه‌های ساخته شده از مواد تابعی [۹ و ۱۰] گزارش شده است.

به علاوه در راستای گسترش سازه‌های انعطاف‌پذیر سبک و با قابلیت بالا، مفهومی تحت عنوان سازه‌هایی با قابلیت خود کنترلی ارائه شده است. این قابلیت با استفاده از خاصیت مستقیم و معکوس مواد پیزوالکتریک به عنوان محرک یا حسگری که بر روی سازه اصلی نصب می‌شود، [۱۱ و ۱۲] بدست می‌آید. این سازه‌ها که دارای مکانیزم‌هایی با قابلیت خود کنترلی و/یا خود نمایشی هستند به اصطلاح سازه‌های هوشمند نامیده می‌شوند. در طول دهه‌های گذشته این مفهوم کاربرد بسیار زیادی در کنترل فعال سازه‌های انعطاف‌پذیر داشته است [۱۳-۱۵]. برای مدل‌سازی رفتار سازه‌های لایه‌ای روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است، از جمله تئوری کلاسیک تغییر شکل صفحات [۱۶ و ۱۷]، تئوری‌های مرتبه یک و مرتبه بالاتر تغییر شکل برشی/بادون در نظر گرفتن اثرات اینرسی [۱۸ و ۱۹] و غیره. همچنین بر مبنای تئوری الاستوسسته سه بعدی هاوچینگ و همکاران [۲۰] فرمولاسیون فضای حالت با تقارن محوری صفحات دایروی و لایه‌ای سه بعدی پیزوالکتریک را بدست آورده و با نتایج روش المان محدود مقایسه کرده‌اند.

همچنین در سال‌های اخیر به علت قابلیت و رواج استفاده از مواد

پیزوالکتریک به عنوان حسگر یا محرک، مطالعه و بررسی این مواد که بر روی سازه‌های مختلف تعبیه شده‌اند مورد اقبال بسیار زیاد پژوهشگران قرار گرفته است. در این راستا، جهت بهره‌برداری بهینه از خواص حسگری/محرکی این مواد، اندرکنش بین سازه اصلی و ماده پیزوالکتریک بایستی به خوبی شناخته شود. به تازگی مطالعاتی بر روی قابلیت‌های مختلف مواد پیزوالکتریک برای نصب بر روی صفحات ساخته شده از مواد تابعی نیز ارائه شده است. به عنوان نمونه اوتاوا و تانیگاوا [۲۱ و ۲۲] صفحه مستطیلی تابعی به همراه لایه پیزوالکتریک تحت بارگذاری گرمایی گذرا را مورد بررسی قرار داده‌اند. یک حل سه بعدی نیز برای صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه محرک پیزوالکتریک توسط ردی و چنگ [۲۳] با استفاده از روش ماتریس انتقال و تکنیک بسط مجانبی پیشنهاد شده است. وانگ و نودا [۲۴] یک سازه هوشمند مرکب از سه لایه شامل یک لایه فلزی و یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه تابعی بین آنها را تحلیل کرده‌اند. در حالیکه یک مدل اجزاء محدود برای مطالعه کنترل شکل و ارتعاشات صفحه مستطیلی تابعی به همراه لایه‌های حسگر و محرک پیزوالکتریک توسط هی و همکاران [۲۵] پیشنهاد شده است. رفتار پس کمانش صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه‌های محرک پیزوالکتریک تحت اثر همزمان بارهای گرمایی-الکتریکی- مکانیکی توسط لیو و همکاران [۲۶] و شن [۲۷] مورد بررسی قرار گرفته است. یانگ و همکاران [۲۸] نیز پاسخ غیر خطی خمشی این صفحات تحت اثر همین بارها را ارائه کرده‌اند. آنها [۲۹] همچنین به بررسی ارتعاشات با دامنه بالای این سازه مرکب با استفاده از روش نیمه تحلیلی بر مبنای روش گلرکین پرداخته‌اند. به تازگی نیز رفتار غیر خطی دینامیک صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین آن که در محیط گرمایی ارتعاشات غیرخطی خواهد داشت توسط هوانگ و شن [۳۰] مورد مطالعه قرار گرفته است. تمامی مطالعات اشاره شده بر روی صفحات تابعی با شکل مستطیلی صورت گرفته است.

از مقدمه ارائه شده و بررسی تحقیقات صورت گرفته در این حوزه مشاهده می‌شود که تاکنون تحقیقی برای بررسی و مطالعه رفتار ارتعاشی و مشخصات دینامیکی صفحه دایروی یا حلقوی تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک ارائه نشده است. در راستای پرکردن این خلا، تحقیق و بررسی بر روی رفتار صفحات دایروی/حلقوی تابعی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک توسط مولفین مقاله حاضر [۳۱-۳۳] انجام گرفته است.

تحقیق حاضر به دنبال یافتن پاسخی تحلیلی برای رفتار ارتعاشی صفحه حلقوی نازک ساخته شده از مواد تابعی به همراه دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین آن بر مبنای تئوری کلاسیک تغییر

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \\ v(z) &= v \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن زیرنویس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب به اجزاء فلز و سرامیک مربوط می‌شوند پس از جایگذاری از معادله (۲) در معادله (۳)، تغییرات خواص در صفحه تابعی با تابع توانی زیر که همانند تابع پیشنهادی ردی و پراوین [۳۴] است مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)(z/2h_f + 1/2)^g + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)(z/2h_f + 1/2)^g + \rho_m \end{aligned} \quad (۴)$$

برخلاف مقالات موجود، در تحقیق حاضر، صفحه تابعی به صورتی است که سطح بالایی فلز و سطح پایین آن سرامیک در نظر گرفته می‌شود. برای این تغییر، در معادله (۴) جای  $m$  و  $c$  را با هم عوض می‌کنیم. در این صورت با قرار دادن  $g=0$  صفحه تابعی به یک صفحه فلزی کامل تبدیل می‌شود.

معادله اساسی دوبعدی الاستو - استاتیک برای یک ماده پیزوالکتریک متقارن در مختصات دکارتی به صورت زیر است [۳۷]:

$$\sigma_i = C_{ki} \varepsilon_k - e_{ji} E_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (۵)$$

که در آن  $\sigma_i$  و  $\varepsilon_k$  به ترتیب معرف اجزای تنش و کرنش و  $e$  معرف ثابت نفوذپذیری ماده پیزوالکتریک و  $E_k$  اجزای میدان الکتریکی و  $c_{ij}$  درایه‌های ماتریس مدول الاستوسیته می‌باشند. بر اساس فرضیات تئوری کلاسیک تغییر شکل صفحات معادله (۵) به شکل زیر تغییر می‌یابد [۳۸]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{11}^E & \bar{C}_{12}^E & 0 \\ \bar{C}_{12}^E & \bar{C}_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{11}^E - \bar{C}_{12}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (۶)$$

که در آن  $\bar{C}_{ij}^E$  اجزای ماتریس سختی و  $\bar{e}_{31}$  ثابت کاهیده نفوذپذیری ماده پیزوالکتریک بوده و به صورت زیر داده شده‌اند [۳۹]:

$$\bar{C}_{11}^E = C_{11}^E - (C_{13}^E)^2 / C_{33}^E \quad \bar{C}_{12}^E = C_{12}^E - (C_{13}^E)^2 / C_{33}^E$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - C_{13}^E e_{33} / C_{33}^E$$

شکل صفحات و در حالت متقارن محوری می‌باشد. خواص فیزیکی و مکانیکی صفحه مرکزی تابعی به صورت تدریجی و یکنواخت و مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه و گسترش میدان پتانسیل الکتریکی در لایه‌های پیزوالکتریک با یک تابع سینوسی مدل شده است در حالیکه معادله ماکسول به عنوان یکی از معادلات حاکم لحاظ شده است. معادله دیفرانسیل حرکت برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی صفحه و به صورت تحلیلی و با استفاده از روش تغییر متغیرها حل شده است. علاوه بر نتایج عددی مربوط به شرایط بارگذاری مختلف، روش بدست آوردن معادلات نیز به صورت کامل ارائه شده است. کاربرد مدل پیشنهاد شده با مطالعه اثرات مربوط به تغییر شاخص گرادیان صفحه تابعی بر روی مشخصات ارتعاشات آزاد سازه بررسی شده است. صحت و دقت نتایج حاصل از روش پیشنهادی با مقایسه نتایج آن با نتایج موجود در تحقیقات مشابه برای صفحه فلزی و همچنین با مقایسه آن با نتایج حاصل از تحلیل سه بعدی اجزاء محدود اثبات شده است.

## ۲- مواد تابعی و مواد پیزوالکتریک

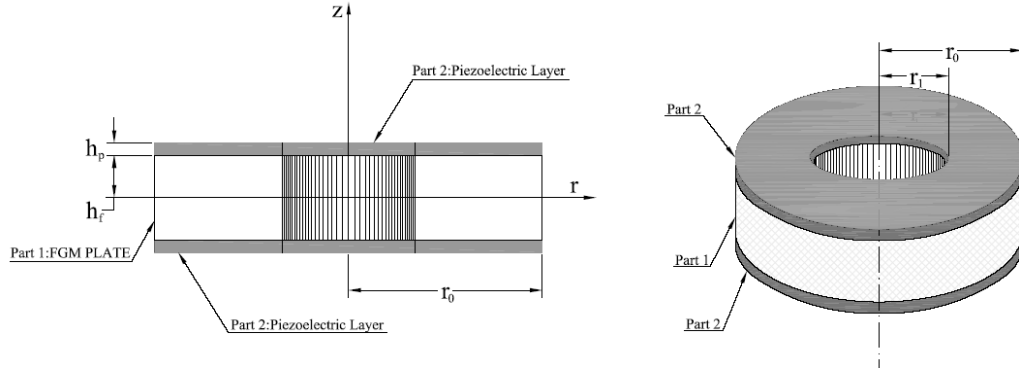
مدل‌های تحلیلی و محاسباتی مختلفی برای توزیع مکانی خواص فیزیکی و مکانیکی مواد تابعی پیشنهاد شده است. در این تحقیق از تابع توانی ساده جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه استفاده خواهد شد. لذا برای ماده تابعی ساخته شده از مخلوط فلز و سرامیک خواهیم داشت:

$$V_m + V_c = 1 \quad (۱)$$

که در آن  $V_m$  و  $V_c$  به ترتیب جزء حجمی سرامیک و فلز می‌باشند. همچنین تغییرات  $V_c$  در راستای ضخامت صفحه به صورت زیر بیان می‌گردد [۳۴]:

$$V_c = (z/2h_f + 1/2)^g, \quad g \geq 0 \quad (۲)$$

که در آن  $2h_f$  ضخامت صفحه تابعی و  $g$  شاخص گرادیان این ماده می‌باشد (شکل ۱) در واقع در حالتی که  $g=1$  تغییرات هر دو جزء سرامیک و فلز خطی است و وقتی  $g=0$  است ماده یک سرامیک کامل خواهد بود. دیگر خواص مکانیکی، فیزیکی و گرمایی ماده تابعی نیز دارای تغییراتی همانند  $V_c$  هستند. فرض می‌شود که مدول الاستوسیته  $E$  و چگالی  $\rho$  ماده تابعی در راستای ضخامت صفحه برای تمامی مقادیر جزء حجمی مطابق رابطه زیر [۳۵] تغییر کند در حالیکه نسبت پواسون  $\nu$  در راستای ضخامت ثابت فرض می‌گردد [۳۶]



شکل (۱): نمایش شماتیک یک صفحه حلقوی تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک

پیزوالکتریک در راستای Z می‌باشد و در صورت اعمال پتانسیل الکتریکی خارجی در لایه‌های پیزوالکتریک، یک دیفرانسیل کرنش که خود باعث ایجاد خمش صفحه می‌شود ایجاد می‌گردد. اجزای کرنش در صفحه تابعی و لایه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر داده می‌شوند [۴۰]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} = -z \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \quad (12)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = z \left( \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} \right) \quad (13)$$

مطابق قانون هوک مولفه‌های تنش در صفحه FG براساس کرنش‌ها و مولفه‌های میدان تغییر مکان به صورت زیر بیان می‌شوند [۴۰]:

$$\sigma_{rr}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right] \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta}^f = -\frac{zE(z)}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (16)$$

که در آن بالانویس f نشان‌دهنده متغیر در صفحه تابعی و E(z) مدول یانگ صفحه تابعی است که در معادله (۴) بیان شده است. همچنین مدل‌های مختلفی برای توزیع پتانسیل الکتریکی در لایه پیزوالکتریک وجود دارد. در این تحقیق از تابع سینوسی زیر که توسط لیو و همکاران [۴۱] پیشنهاد شده است استفاده می‌شود:

همچنین روابط کرنش-تغییر مکان الکتریکی برای یک ماده پیزوالکتریک متقارن به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۵]:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

که در آن  $D_i$  ( $i=1,2,3$ ) معرف اجزای تغییر مکان الکتریکی و  $\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{33}$  ثابت‌های کاهیده دی الکتریک لایه پیزوالکتریک بوده و به صورت زیر داده شده‌اند [۳۹]:

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \bar{\varepsilon}_{33} + (e_{33}^2 / C_{33}^E) \quad \bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{11}$$

که در آن  $\bar{\varepsilon}_{33}, \bar{\varepsilon}_{11}$  ثابت‌های دی الکتریک لایه پیزوالکتریک هستند.

### ۳- معادلات اساسی در میدان پتانسیل الکتریکی

نمایش شماتیک یک صفحه حلقوی تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک در بالا و پایین آن در شکل (۱) دیده می‌شود. در بیشتر کاربردهای عملی نسبت شعاع به ضخامت صفحه بیشتر از ۱۰ بوده و از فرضیات کرشهف که در آن اثر تغییر مکان برشی و اینرسی دورانی صرف‌نظر می‌شود، می‌توان استفاده نمود. براساس این تئوری کلی‌ترین حالت میدان تغییر مکان برای صفحات فوق به صورت زیر است [۳۸]:

$$u_z = u_z(r, \theta, t) = w(r, \theta, t) \quad (8)$$

$$u_r = u_r(r, \theta, t) = -z \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (9)$$

$$u_\theta = u_\theta(r, \theta, t) = -z \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \quad (10)$$

که در آن  $u_r$  و  $u_\theta$  و  $u_z$  به ترتیب تغییر مکان‌ها در راستای  $r$  و  $\theta$  و  $Z$  هستند. همچنین فرض می‌شود که جهت قطب در لایه‌های

۴- معادلات حاکم

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم صفحه حلقوی هوشمند تابعی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک ابتدا اجزای گشتاور خمشی و نیروی برشی را به صورت زیر بدست می‌آوریم [۴۰]:

$$M_{rr} = \int_{-h_f-h_p}^{h_f+h_p} z \sigma_{rr} dz = \int_{-h_f}^{h_f} z \sigma_{rr}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \sigma_{rr}^p dz$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-h_f-h_p}^{h_f+h_p} z \sigma_{\theta\theta} dz = \int_{-h_f}^{h_f} z \sigma_{\theta\theta}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \sigma_{\theta\theta}^p dz \quad (27)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h_f-h_p}^{h_f+h_p} z \tau_{r\theta} dz = \int_{-h_f}^{h_f} z \tau_{r\theta}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \tau_{r\theta}^p dz$$

$$q_r = \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} \quad (28)$$

$$q_\theta = \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r}$$

حال با جایگذاری اجزای تنش با استفاده از معادلات (۱۴) تا (۱۶) و معادلات (۲۴) تا (۲۶) در معادلات (۲۷) و (۲۸) و انتگرالگیری از معادلات حاصل، اجزای گشتاور خمشی و نیروی برشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M_{rr} = - \left[ (d_1 + d_2) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{4}{\pi} h_p \bar{e}_{31} \varphi + (d_1 + d_2 - 2A_1) \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right] \quad (29)$$

$$M_{\theta\theta} = - \left[ (d_1 + d_2 - 2A_1) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{4}{\pi} h_p \bar{e}_{31} \varphi + (d_1 + d_2) \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right] \quad (30)$$

$$M_{r\theta} = -2A_1 \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (31)$$

$$q_r = - \left[ (d_1 + d_2) \frac{\partial}{\partial r} \Delta w + \frac{4}{\pi} h_p \bar{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \quad (32)$$

$$q_\theta = - \frac{1}{r} \left[ (d_1 + d_2) \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{4}{\pi} h_p \bar{e}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \quad (33)$$

که در آن ضرایب  $d_2, d_1, A_1$  مربوط به سختی صفحه به صورت زیر خواهند بود:

$$\phi(r, \theta, z, t) = \varphi(r, \theta, t) \sin(\pi(z - h_f)/h_p) \quad (17)$$

که در آن  $\phi$  پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک و  $2h_f$  و  $h_p$  به ترتیب ضخامت لایه‌های تابعی و پیزوالکتریک می‌باشند. لازم به ذکر است که مدل فرضی بالا برای تابع پتانسیل، شرایط مرزی را که مطابق آن بایستی پتانسیل الکتریکی در روی سطوح داخلی  $z = \pm h_f$  و سطوح خارجی  $z = \pm(h_f + h_p)$  صفر گردد را ارضا می‌نماید. بر مبنای فرض تغییر پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک مطابق معادله (۱۷)، شدت میدان الکتریکی  $E$  و تغییر مکان الکتریکی  $D$  در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود [۴۲]:

$$E_r = - \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} \quad (18)$$

$$E_\theta = - \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = - \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} \quad (19)$$

$$E_z = - \frac{\partial \phi}{\partial z} = - \frac{\pi \varphi}{h_p} \cos \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} \quad (20)$$

$$D_r = \bar{\epsilon}_{11} E_r = - \bar{\epsilon}_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} \quad (21)$$

$$D_\theta = \bar{\epsilon}_{11} E_\theta = - \bar{\epsilon}_{11} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} \quad (22)$$

$$D_z = \bar{\epsilon}_{33} E_z + \bar{e}_{31} (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) = - \bar{\epsilon}_{33} \frac{\pi \varphi}{h_p} \cos \frac{\pi(z - h_f)}{h_p} - \bar{e}_{31} z \Delta w \quad (23)$$

که در آن  $\Delta$  اپراتور لاپلاسین در مختصات استوانه‌ای می‌باشد:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$$

روابط تنش- کرنش- شدت میدان الکتریکی در لایه پیزوالکتریک نیز با استفاده از معادله (۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{rr}^p = \bar{C}_{11}^E \epsilon_{rr} + \bar{C}_{12}^E \epsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z \quad (24)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^p = \bar{C}_{12}^E \epsilon_{rr} + \bar{C}_{11}^E \epsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z \quad (25)$$

$$\tau_{r\theta}^p = (\bar{C}_{11}^E - \bar{C}_{12}^E) \epsilon_{r\theta} \quad (26)$$

که در آن بالانویس  $p$  نشان‌دهنده متغیر مورد نظر در لایه پیزوالکتریک می‌باشد.

$$(d_1 + d_2)\Delta\Delta w + \frac{4}{\pi} h_p \bar{e}_{31} \Delta\varphi + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (36)$$

که در آن

$$P_0 = 2(\tilde{\rho}_f h_f + \rho_p h_p) \quad \tilde{\rho}_f = \frac{1}{2h_f} \int_{-h_f}^{h_f} \rho_f(z) dz$$

$$d_1 = \int_{-h_f}^{h_f} \frac{z^2 E_f(z)}{1 - \nu_f^2} dz, \quad d_2 = 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} \bar{C}_{11}^E z^2 dz,$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[ \left( (1-\nu) d_1 + \left( 1 - \frac{\bar{C}_{12}^E}{\bar{C}_{11}^E} \right) d_2 \right) \right] \quad (34)$$

از سوی دیگر بر مبنای تئوری کلاسیک تغییر شکل صفحات معادله دیفرانسیل حرکت در جهت Z به صورت زیر خواهد بود [۳۹]:

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{q_r}{r} \quad (35)$$

$$- \left( \int_{-h_f}^{h_f} \rho_f(z) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} \rho_p \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz \right) = 0$$

که در آن  $\rho_f$  و  $\rho_p$  به ترتیب چگالی ماده تابعی و لایه‌های پیزوالکتریک می‌باشند. حال با جایگذاری معادلات (۳۲) و (۳۳) و معادله (۸) در معادله (۳۵) معادله دیفرانسیل حرکت به صورت زیر بدست می‌آید:

جدول (۱): خواص مواد تابعی و پیزوالکتریک

FGM Plate	$E_c = 205 \text{ GPa}, \nu = 0.3$	$E_m = 200$
	$\rho_c = 8900 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\rho_m = 7800$
PZT4 Layers	$e_{31} \text{ (C/m}^2\text{)} = -4.1$	$e_{33} = 14.1$
	$\rho_p = 7500 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$e_{15} = 10.5$
	$C_{11}^E = 132 \text{ GPa}$	$C_{12}^E = 71$
	$\Xi_{11} = 7.124 \text{ (nF/m)}$	$\Xi_{33} = 5.841$
	$C_{13}^E = 73, C_{55}^E = 26$	$C_{33}^E = 115$

جدول (۲): فرکانس‌های طبیعی صفحه حلقوی تابعی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک برای شرایط مرزی (S-S, C-C) و ( $r_0/h=60$ )

Power Index	Mode Nno.	C*-C boundary conditions				S-S boundary conditions			
		Present FEM	Present Analytical	Diff. (%)	[44]	Present FEM	Present Analytical	Diff. (%)	[44]
0	0	447.54	448.39	0.19	448.02	222.02	222.60	0.26	222.18
	1	1218.97	1238.35	1.59	1239.18	823.31	828.99	0.69	827.29
	2	2348.01	2433.48	3.64	2436.03	1795.75	1829.51	1.88	1828.53
1	0	435.35	435.87	0.12	-	216.34	216.60	0.12	-
	1	1185.76	1205.80	1.69	-	803.66	811.05	0.92	-
	2	2284.05	2371.07	3.81	-	1753.12	1783.62	1.74	-
3	0	429.11	429.58	0.11	-	214.28	214.67	0.18	-
	1	1168.76	1187.34	1.59	-	794.09	800.68	0.83	-
	2	2251.31	2336.18	3.77	-	1732.33	1765.59	1.92	-
5	0	427.24	427.92	0.16	-	213.29	213.76	0.22	-
	1	1163.66	1185.19	1.85	-	791.18	797.67	0.82	-
	2	2241.47	2329.78	3.94	-	1725.61	1765.99	2.34	-
7	0	426.36	426.91	0.13	-	213.05	213.41	0.17	-
	1	1161.28	1182.30	1.81	-	790.06	796.14	0.77	-
	2	2236.89	2323.68	3.88	-	1723.22	1761.48	2.22	-
9	0	425.85	426.87	0.24	-	212.73	213.50	0.36	-
	1	1159.87	1180.40	1.77	-	788.91	794.59	0.72	-
	2	2234.17	2323.98	4.02	-	1720.63	1761.58	2.38	-
10	0	425.68	426.62	0.22	-	212.64	213.43	0.37	-
	1	1159.43	1178.79	1.67	-	788.55	794.39	0.74	-
	2	2233.33	2319.09	3.84	-	1719.83	1759.73	2.32	-

• حرف اول شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای داخلی و حرف دوم شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای خارجی صفحه حلقوی را نشان می‌دهد.

بدست آورد. به همین ترتیب  $\lambda_i$  ها هم از حل معادله (۴۰) حاصل می‌شوند.

با جاگذاری  $i$  در معادله (۴۱) سه سری از توابع بسل به فرم  $c_i Z_{i1}(m, \alpha_i, r) + c_{i+3} Z_{i2}(m, \alpha_i, r)$ ,  $(i=1,2,3)$  حاصل شده و حل نهایی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w = \sum_{i=1}^3 [c_i Z_{i1}(m, \delta_i, r) + c_{i+3} Z_{i2}(m, \delta_i, r)] e^{i(m\theta - \alpha t)}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^3 x_i [c_i Z_{i1}(m, \delta_i, r) + c_{i+3} Z_{i2}(m, \delta_i, r)] e^{i(m\theta - \alpha t)}$$

(۴۲)

که در آن

$$Z_{i1}(m, \alpha_i, r) = \begin{cases} J_m(\alpha_i r) & , \lambda_i < 0 \\ I_m(\alpha_i r) & , \lambda_i > 0 \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

(۴۳)

$$Z_{i2}(m, \alpha_i, r) = \begin{cases} Y_m(\alpha_i r) & , \lambda_i < 0 \\ K_m(\alpha_i r) & , \lambda_i > 0 \end{cases} \quad (i=1,2,3)$$

که در آن  $J$  و  $Y$  به ترتیب توابع بسل از مرتبه اول و دوم  $I$  و  $K$  به ترتیب توابع بسل اصلاح شده از مرتبه اول و دوم می‌باشند.  $c_i$   $(i=1, \dots, 6)$  نیز شش ثابت انتگرالگیری هستند. مطابق معمول، درمیان ماتریس حاوی فرکانس‌های سیستم پس از اعمال شرایط مرزی الکتریکی و تغییر مکان در نظر گرفته خواهد شد. حال معادله پایستگی شار الکتریکی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\int_{r_f}^{r_f+h_p} D_r(r, \theta, t) dz = 0 \quad (۴۴)$$

حال با جایگذاری معادله (۲۱) در رابطه (۴۴) و (۳۷) شرایط مرزی الکتریکی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (۴۵)$$

شرایط مرزی استاندارد برای تکیه‌گاه‌های گیردار، تکیه‌گاه ساده و آزاد به صورت زیر خواهند بود:

**الف - تکیه‌گاه گیردار:**

$$w(r_1, \theta, t) = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (۴۶)$$

$$w(r_0, \theta, t) = \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0$$

**ب - تکیه‌گاه ساده:**

$$w(r_1, \theta, t) = M_{rr}(r_1, \theta, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (۴۷)$$

توجه شود که بر مبنای معادله ماکسول، دیورژانس چگالی شار الکتریکی در تمامی نقاط داخل محیط باید صفر گردد. این شرایط با صفر قرار دادن انتگرال دیورژانس چگالی شار الکتریکی در راستای ضخامت لایه‌های پیزوالکتریک برای هر  $r$  و  $\theta$  به صورت زیر ارضا می‌گردد [۴۲]:

$$\int_{r_f}^{r_f+h_p} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dz = \int_{r_f}^{r_f+h_p} \left( \frac{\partial(rD_r)}{r\partial r} + \frac{\partial D_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0$$

اپراتور  $\vec{\nabla}$  در معادله بالا اپراتور گرادیان در مختصات استوانه‌ای می‌باشد. حال با جایگذاری معادلات (۲۱) تا (۲۳) در معادله بالا رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$-\frac{h_p^2 \bar{\epsilon}_{11}}{\pi^2 \bar{\epsilon}_{33}} \Delta \varphi + \varphi - \frac{h_p^2 \bar{\epsilon}_{31}}{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33}} = 0 \quad (۳۷)$$

### ۵- روش حل

روش حل معادلات دیفرانسیل حرکت (۳۶) و (۳۷) و بدست آوردن دو متغیر مستقل  $w$  و  $\varphi$  در این بخش ارائه خواهد شد. ابتدا تغییر متغیر زیر انجام می‌گیرد [۴۳]:

$$\varphi_1 = x w_1 \quad (۳۸)$$

که در آن  $x$  یک ثابت است. حال با جایگذاری معادله (۳۸) در معادلات (۳۶) و (۳۷) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta[\Delta w_1 - \frac{P_0 \omega^2 h_p^2 (2\bar{\epsilon}_{11}x + \bar{\epsilon}_{31}\pi) - 8\pi \bar{\epsilon}_{33} \bar{\epsilon}_{31} h_p x^2}{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33} (d_1 + d_2)} w_1] = 0$$

$$\Delta w_1 - \frac{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33} x}{h_p^2 (2\bar{\epsilon}_{11}x + \bar{\epsilon}_{31}\pi)} w_1 = 0 \quad (۳۹)$$

جواب برای  $w_1$  تحت شرایط زیر یکتاست:

$$\frac{P_0 \omega^2 h_p^2 (2\bar{\epsilon}_{11}x + \bar{\epsilon}_{31}\pi) - 8\pi \bar{\epsilon}_{33} \bar{\epsilon}_{31} h_p x^2}{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33} (d_1 + d_2) x} = \frac{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33} x}{h_p^2 (2\bar{\epsilon}_{11}x + \bar{\epsilon}_{31}\pi)} \quad (۴۰)$$

$$\frac{2\pi^2 \bar{\epsilon}_{33} x}{h_p^2 (2\bar{\epsilon}_{11}x + \bar{\epsilon}_{31}\pi)} = \lambda \quad (۴۰)$$

که در آن  $\lambda$  یک ثابت است. با این شرایط، معادله (۳۹) به رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$\Delta w_1 - \lambda w_1 = 0 \quad (۴۱)$$

با حل معادله (۴۰) برای  $x$  سه ریشه  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) را می‌توان

آزاد در مرزهای داخلی و خارجی صفحه حلقوی (شکل ۱) یک ماتریس شامل فرکانس‌های سیستم را میتوان فرموله نمود. به عنوان نمونه دترمینان ماتریس فرکانس‌ها در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) با استفاده از معادلات (۴۲) و (۴۶) به صورت معادله (۴۹) حاصل می‌شود که در آن علامت پرایم نشانگر مشتق نسبی  $\partial/\partial r$  و  $Z_{ij}$  در معادله (۴۳) داده شده است. با صفر قراردادن دترمینان معادله (۴۹)، فرکانس‌ها و شکل مدها بدست می‌آیند.

$$w(r_0, \theta, t) = M_{rr}(r_0, \theta, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0$$

ج - لبه آزاد:

$$M_{rr}(r_1, \theta, t) = Q(r_1, \theta, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0$$

(۴۸)

$$M_{rr}(r_0, \theta, t) = Q(r_0, \theta, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0$$

برای تمامی ترکیبات ممکن از حالت‌های تکیه گاهی گیردار، ساده و

$$\begin{vmatrix} Z_{11}(m, \alpha_1 r_1) & Z_{12}(m, \alpha_1 r_1) & Z_{21}(m, \alpha_2 r_1) & Z_{22}(m, \alpha_2 r_1) & Z_{31}(m, \alpha_3 r_1) & Z_{32}(m, \alpha_3 r_1) \\ Z'_{11}(m, \alpha_1 r_1) & Z'_{12}(m, \alpha_1 r_1) & Z'_{21}(m, \alpha_2 r_1) & Z'_{22}(m, \alpha_2 r_1) & Z'_{31}(m, \alpha_3 r_1) & Z'_{32}(m, \alpha_3 r_1) \\ x_1 Z'_{11}(m, \alpha_1 r_1) & x_1 Z'_{12}(m, \alpha_1 r_1) & x_2 Z'_{21}(m, \alpha_2 r_1) & x_2 Z'_{22}(m, \alpha_2 r_1) & x_3 Z'_{31}(m, \alpha_3 r_1) & x_3 Z'_{32}(m, \alpha_3 r_1) \\ Z_{11}(m, \alpha_1 r_0) & Z_{12}(m, \alpha_1 r_0) & Z_{21}(m, \alpha_2 r_0) & Z_{22}(m, \alpha_2 r_0) & Z_{31}(m, \alpha_3 r_0) & Z_{32}(m, \alpha_3 r_0) \\ Z'_{11}(m, \alpha_1 r_0) & Z'_{12}(m, \alpha_1 r_0) & Z'_{21}(m, \alpha_2 r_0) & Z'_{22}(m, \alpha_2 r_0) & Z'_{31}(m, \alpha_3 r_0) & Z'_{32}(m, \alpha_3 r_0) \\ x_1 Z'_{11}(m, \alpha_1 r_0) & x_1 Z'_{12}(m, \alpha_1 r_0) & x_2 Z'_{21}(m, \alpha_2 r_0) & x_2 Z'_{22}(m, \alpha_2 r_0) & x_3 Z'_{31}(m, \alpha_3 r_0) & x_3 Z'_{32}(m, \alpha_3 r_0) \end{vmatrix} \quad (49)$$

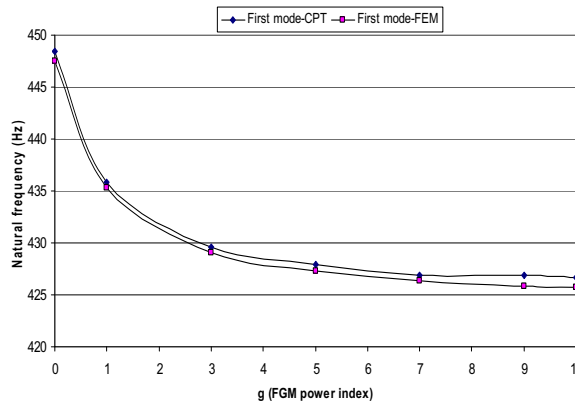
جدول (۳): فرکانس‌های طبیعی صفحه حلقوی تابعی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک برای شرایط مرزی (S-C و C-S) و (r0/h=60)

Power Index	Mode no.	C*-S boundary conditions				S-C boundary conditions			
		Present FEM	Present Analytical	Diff. (%)	[44]	Present FEM	Present Analytical	Diff. (%)	[44]
0	0	294.12	294.27	0.05	293.32	352.21	352.74	0.15	352.69
	1	981.03	989.96	0.91	989.94	1041.51	1053.17	1.12	1052.81
	2	2032.41	2085.05	2.59	2086.68	2095.91	2151.24	2.64	2153.53
1	0	287.16	287.48	0.11	-	343.88	344.29	0.12	-
	1	957.82	966.92	0.95	-	1016.87	1028.87	1.18	-
	2	1984.33	2036.12	2.61	-	2046.33	2101.79	2.71	-
3	0	283.72	284.17	0.16	-	339.76	340.41	0.19	-
	1	946.36	955.63	0.98	-	1004.70	1016.86	1.21	-
	2	1960.59	2012.35	2.64	-	2021.85	2076.24	2.69	-
5	0	282.62	283.13	0.18	-	338.44	339.25	0.24	-
	1	942.68	952.30	1.02	-	1000.80	1012.91	1.21	-
	2	1952.96	2006.28	2.73	-	2013.99	2067.56	2.66	-
7	0	282.24	282.66	0.15	-	337.99	338.56	0.17	-
	1	941.41	951.39	1.06	-	999.45	1012.84	1.34	-
	2	1950.33	2004.74	2.79	-	2011.26	2067.37	2.79	-
9	0	281.82	282.30	0.17	-	337.48	338.46	0.29	-
	1	940.02	950.64	1.13	-	997.94	1011.41	1.35	-
	2	1947.40	2001.54	2.78	-	2008.24	2063.27	2.74	-
10	0	281.69	282.06	0.13	-	337.32	338.10	0.23	-
	1	939.57	951.03	1.22	-	997.49	1011.95	1.45	-
	2	1946.52	2001.41	2.82	-	2007.33	2063.74	2.81	-

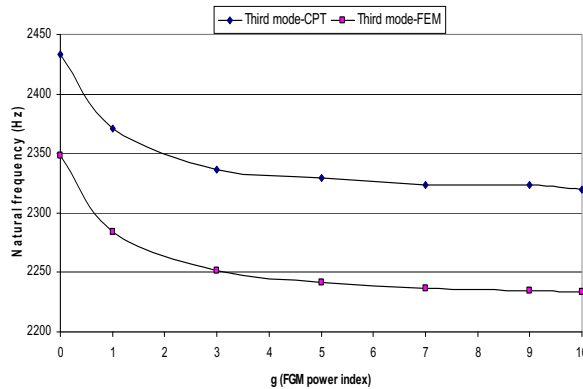
• حرف اول شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای داخلی و حرف دوم شرایط تکیه‌گاهی در مرزهای خارجی صفحه حلقوی را نشان می‌دهد



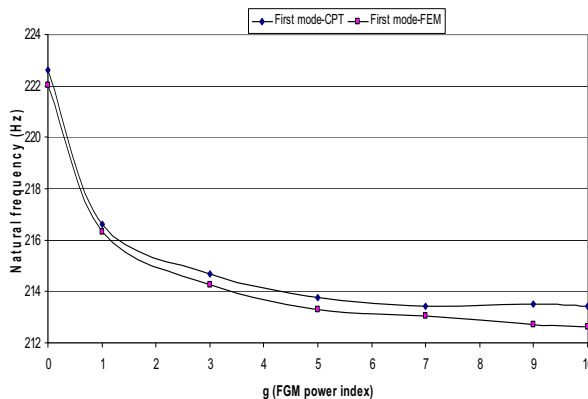
برابر ۲/۸۱ درصد برای  $m=2, g=9$  خواهد بود.



شکل (۲): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس های طبیعی در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار (مد اول)



شکل (۳): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس های طبیعی در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار (مد سوم)



شکل (۴): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس های طبیعی در شرایط تکیه گاهی ساده - ساده (مد اول)

قبل از شروع بحث و بررسی نتایج، برای تایید نتایج حاصله به مقایسه آنها با نتایج ارائه شده توسط دوان و همکاران [۴۴] که برای صفحه حلقوی از جنس فولاد ارائه شده است، خواهیم پرداخت. همچنین از آنجا که تاکنون نتایجی برای صفحه تابعی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک در تحقیقات موجود ارائه نشده است به تایید نتایج با مقایسه آنها با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود سه بعدی می پردازیم. مدل اجزاء محدود ارائه شده شامل المان های سه بعدی ۸ گره ای با سه درجه آزادی (جابجایی) برای هر گره در مورد المان مربوط به صفحه تابعی و ۶ درجه آزادی (سه درجه جابجایی، دما، ولتاژ و خواص مغناطیسی) برای المان مربوط به لایه های پیزوالکتریک خواهد بود.

### ۶- ارائه نتایج حاصله و بحث و بررسی آنها

در این بخش، صفحه حلقوی از جنس مواد تابعی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک (شکل (۱)) تحت چهار نوع شرایط مرزی مختلف حاصل ترکیب شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده (C-C)، (S-S، C-S و S-C) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. حرف اول شرایط تکیه گاهی در مرزهای داخلی و حرف دوم شرایط تکیه گاهی در مرزهای خارجی صفحه حلقوی را نشان می دهد. حرف C معرف تکیه گاه گیردار و حرف S معرف تکیه گاه ساده خواهد بود.

خواص فیزیکی ماده تابعی و لایه های پیزوالکتریک که در محاسبات بکار رفته اند در جدول شماره ۱ آورده شده اند. شعاع داخلی ( $r_1$ ) و خارجی ( $r_0$ ) صفحه حلقوی به ترتیب برابر ۰/۱ و ۰/۶ متر و نسبت ضخامت هر لایه پیزوالکتریک به ضخامت صفحه تابعی برابر ۰/۱ در نظر گرفته شده است. لایه های پیزوالکتریک در جهت ضخامت قطبی شده و هر دو سطح هر لایه اتصال کوتاه شده است.

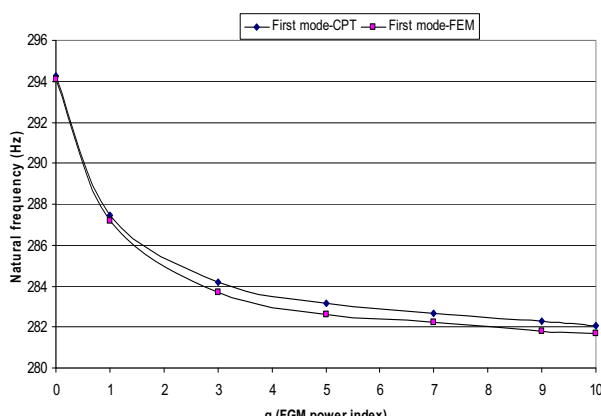
اولین سه فرکانس طبیعی صفحه حلقوی از جنس مواد تابعی کوپل با لایه های پیزوالکتریک که با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده در مقاله حاضر برای چهار نوع شرایط مرزی مختلف (S-S، C-C)، (S-C و C-S) محاسبه شده اند در جداول (۲) و (۳) ارائه شده اند. این نتایج با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود سه بعدی مقایسه شده است. همانطور که از جداول (۲) و (۳) مشخص می گردد نتایج حاصل از روش تحلیلی حاضر در حالت صفحه فولادی ( $g=0$ ) تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۴۴] و همچنین همخوانی قابل قبولی با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود برای گرادیان های تابعی ( $g$ ) مختلف دارد. همانطور که از جدول (۲) مشخص می گردد بیشینه تفاوت بین نتایج روش تحلیلی حاضر با نتایج تحلیل اجزاء محدود در حدود ۴/۰۲ درصد در حالت  $m=2, g=9$  و با حالت C-C و در حدود ۲/۳۸ درصد در حالت  $m=2, g=9$  و با حالت تکیه گاهی S-S می باشد. همچنین این بیشینه تفاوت برای حالت تکیه گاهی C-S برابر ۲/۸۲ درصد و برای حالت تکیه گاهی S-C

مقدار گرادیان تابعی از ۳ به ۹ (افزایشی برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی به مقدار ۰/۶۳ درصد کاهش می‌یابد. این روند در مورد صفحه تابعی با سایر شرایط تکیه‌گاهی و مدهای دیگر ارتعاشی نیز صادق است به عنوان مثال مطابق جدول شماره (۲) و در حالت شرایط مرزی ساده-ساده، با افزایش مقدار گرادیان تابعی از صفر به ۳، فرکانس طبیعی مد سوم سیستم به مقدار ۳/۵۶ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین شرایط تکیه‌گاهی، با افزایش مقدار گرادیان تابعی از ۵ به ۱۰، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی در حدود ۰/۱۵ درصد کاهش می‌یابد.

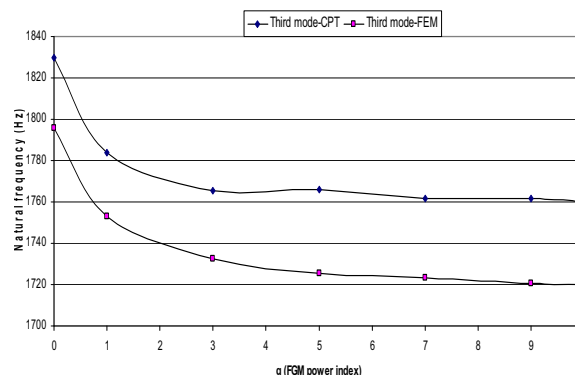
همچنین مطابق نتایج ارائه شده در جدول شماره (۳) در حالت شرایط مرزی گیردار-ساده با افزایش مقدار گرادیان تابعی از ۱ به ۳ (افزایشی برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مد اول سیستم به مقدار ۱/۲۰ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین شرایط تکیه‌گاهی، با افزایش مقدار گرادیان تابعی از ۳ به ۹ (افزایشی بر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی به مقدار ۰/۶۶ درصد کاهش می‌یابد.

در مورد صفحه تابعی با شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار نیز مطابق جدول شماره (۳)، با افزایش مقدار گرادیان تابعی از صفر به ۳، فرکانس طبیعی مد سوم سیستم به مقدار ۳/۴۹ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین شرایط تکیه‌گاهی، با افزایش مقدار گرادیان تابعی از ۵ به ۱۰، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی در حدود ۰/۱۸ درصد کاهش می‌یابد.

برای مشاهده بهتر این روند و بررسی اثرات تغییر گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی سیستم، شکل‌های شماره (۲) تا (۹) برای نمایش این اثرات در مورد مدهای فرکانسی اول و سوم سیستم ارائه شده است.



شکل (۶): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده (مد اول)



شکل (۵): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده (مد سوم)

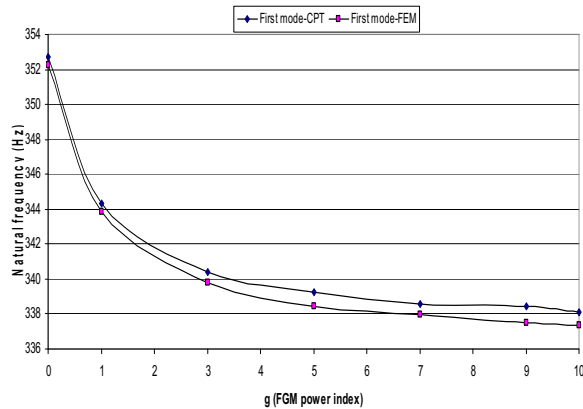
پس از تایید صحت نتایج از طریق مقایسه با نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه، در این بخش به بحث و بررسی نتایج حل بسته بدست آمده از روش تحلیلی پیشنهادی و روش المان محدود می‌پردازیم. با بررسی جداول (۲) و (۳) مشاهده می‌گردد که در فرکانس‌های پایینتر، روش تحلیلی پیشنهادی نتایج نزدیکتری به نتایج حاصل از روش المان محدود در مقایسه با فرکانس‌های بالاتر ارائه می‌نماید.

به عنوان نمونه روش تحلیلی پیشنهادی فرکانس برابر ۰/۱۹ درصد بیشتر از فرکانس حاصل از تحلیل المان محدود را برای حالت  $g=0$ ,  $m=0$  ارائه می‌نماید در حالیکه این تفاوت در حالت  $g=0$ ,  $m=2$  برابر ۳/۶۴ درصد برای شرایط مرزی گیردار-گیردار می‌باشد.

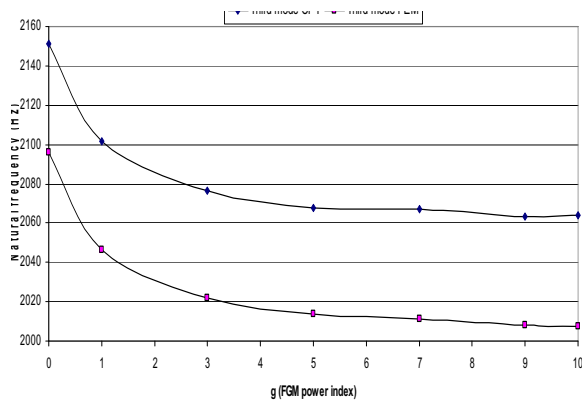
این روند در مورد سایر شرایط تکیه‌گاهی نیز صادق می‌باشد به عنوان مثال مطابق جدول شماره (۳) و در حالت شرایط مرزی گیردار-ساده، در روش تحلیلی پیشنهادی فرکانس طبیعی حدود ۰/۰۵ درصد بیشتر از فرکانس حاصل از تحلیل المان محدود برای حالت  $g=0$ ,  $m=0$  بدست آمده است در حالیکه این تفاوت در حالت  $g=0$ ,  $m=2$  برابر ۲/۵۹ درصد می‌باشد. به علاوه شرایط مرزی ساده-ساده منجر به فرکانس‌های طبیعی پایینتری در مقایسه با دیگر شرایط تکیه‌گاهی (گیردار-گیردار، گیردار-ساده و ساده-گیردار) می‌گردد.

در مرحله بعد به بررسی اثر تغییر گرادیان تابعی بر روی مشخصات ارتعاشات آزاد صفحه مربوطه می‌پردازیم. نتایج ارائه شده در جداول (۲) و (۳) نشان می‌دهد که با افزایش مقدار گرادیان تابعی فرکانس طبیعی مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم کاهش می‌یابد. این روند برای همه انواع شرایط تکیه‌گاهی صادق می‌باشد. به علاوه این روند کاهش فرکانسی برای مقادیر کوچکتر گرادیان تابعی مشهودتر می‌باشد. به عنوان نمونه در حالت شرایط مرزی گیردار-گیردار با افزایش مقدار گرادیان تابعی از ۱ به ۳ (افزایشی برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مد اول سیستم به مقدار ۱/۴۴ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین شرایط تکیه‌گاهی، با افزایش

فرکانس‌های پایینتر، روش تحلیلی پیشنهادی نتایج نزدیکتری به نتایج حاصل از روش المان محدود در مقایسه با فرکانس‌های بالاتر ارائه می‌نماید.



شکل (۸): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار (مد اول)

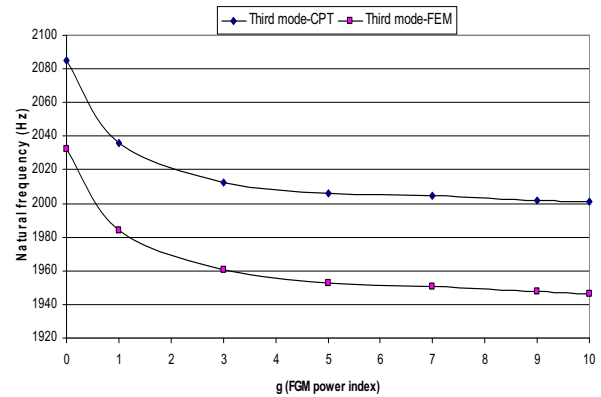


شکل (۹): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط تکیه‌گاهی ساده-گیردار (مد سوم)

به علاوه با افزایش مقدار گرادیان تابعی فرکانس طبیعی مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم برای تمامی شرایط تکیه‌گاهی کاهش می‌یابد. همچنین این روند کاهش فرکانس برای مقادیر کوچکتر گرادیان تابعی مشهودتر می‌باشد. پاسخ‌های تحلیلی و نتایج حاصله، مدل ساده شده‌ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات ارتعاشی صفحات حلقوی تابعی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک ارائه می‌دهد. این نتایج می‌تواند در طراحی سازه‌های هوشمند شده با لایه‌های پیزوالکتریک مورد استفاده در کاربردهای صنعتی همچون موتورهای التراسونیک مورد استفاده قرار گیرد.

## ۹- مراجع

- [1] Koizumi, M., "The Concept of FGM", Ceram Trans Func Grad Mater, Vol. 34, pp. 3-10, 1993.



شکل (۷): اثر شاخص گرادیان تابعی بر روی فرکانس‌های طبیعی در شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده (مد سوم)

همانطور که از شکل‌های شماره (۲) تا (۹) مشاهده می‌گردد روند کاهش فرکانس طبیعی با افزایش مقدار گرادیان تابعی مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم و برجسته بودن این اثر در مورد مدهای فرکانسی پایینتر در تمامی حالات مورد مطالعه سیستم صفحه تابعی هوشمند صادق است ولی برای گرادیان‌های تابعی بزرگتر از ۷، فرکانس‌های طبیعی تقریباً ثابت می‌مانند. در واقع می‌توان نتیجه گرفت که برای گرادیان‌های تابعی بسیار بزرگ، صفحه تابعی تبدیل به یک صفحه فلزی و صفحه مرکب مربوطه به یک صفحه هوشمند مرکب دارای هسته فلزی می‌گردد.

## ۷- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر یک حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد یک صفحه حلقوی مرکب از یک صفحه تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک براساس تئوری صفحه کرشلف ارائه شده است. فرض می‌شود که مشخصات مواد تابعی صفحه میانی مطابق یک تابع توانی براساس جزء حجمی مواد تشکیل‌دهنده در راستای ضخامت صفحه تغییر می‌کند. همچنین گسترش میدان پتانسیل الکتریکی با یک تابع سینوسی طوری مدل شده است که معادله ماکسول را ارضاء نماید. حل تحلیلی بر مبنای تغییر متغیرها به همراه معادلات کامل ریاضی ارائه شده است. معادلات دیفرانسیل حرکت برای اولین بار به صورت تحلیلی برای حالت‌های مختلف شرایط مرزی حل شده و پاسخ‌های تحلیلی بدست آمده است. صحت روش تحلیلی ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه و همچنین با مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود سه‌بعدی تایید شده است. در مطالعات عددی تاکید اصلی بر بررسی اثر تغییر ایندکس گرادیان تابعی بر روی مشخصات ارتعاشات آزاد سازه مربوطه می‌باشد. همچنین با مقایسه نتایج روش حاضر و نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. همچنین مشاهده می‌گردد که برای تمامی شرایط مرزی در

- [15] Peng, F., Ng, A. and Hu, Y.R., "Actuator Placement Optimization and Adaptive Vibration Control of Plate Smart Structures", *J. Intell Mater Syst Struct.*, Vol. 16, pp. 263–71, 2005.
- [16] Ashton, J. E. and Whitney, J. M., "Theory of Laminated Plates", Technomic publishing, Lancaster, PA, 1970.
- [17] Szilard, R., "Theory and Analysis of Plates-Classical and Numerical Methods," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Vol. 724, 1974.
- [18] Reddy, J.N., "A General Third-order Nonlinear Theory of Plates with Moderate Thickness," *J. Nonlinear Mech.*, Vol. 25, pp. 677-686, 1990.
- [19] Mindlin, R.D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates," *J. Appl Mech.*, Vol. 18, pp. 31–38, 1951.
- [20] Haojiang, D., Rongqiao, X., Yuwei, C. and Weiqui, C., "Free Axisymmetric Vibration of Transversely Isotropic Piezoelectric Circular Plates," *Int J. Solids Struct.*, Vol. 36, pp. 4629-52, 1999.
- [21] Ootao, Y. and Tanigawa, Y., "Three-dimensional Transient Piezo-thermo-elasticity in Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 37, pp. 4377–401, 2000.
- [22] Ootao, Y. and Tanigawa, Y., "Control of Transient Thermoelastic Displacement of a Functionally Graded Rectangular Plate Bonded to a Piezoelectric Plate Due to Nonuniform Heating," *Acta Mech.*, Vol. 148, pp. 17–33, 2001.
- [23] Reddy, J. N. and Cheng, Z. Q., "Three-dimensional Solutions of Smart Functionally Graded Plates", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 68, pp. 234–41, 2001.
- [24] Wang, B.L. and Noda, N., "Design of Smart Functionally Graded Thermo-piezoelectric Composite Structure," *Smart Mater. Struct.* Vol. 10, pp. 189–93, 2001.
- [25] He, X. Q., Ng, T. Y., Sivashanker, S. and Liew, K. M., "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 38, pp. 1641–55, 2001.
- [26] Liew, K. M. , Yang, J. and Kitipornchai, S., "Post Buckling of Piezoelectric FGM Plates Subject to Thermo-Electromechanical Loading," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40, pp. 3869–92, 2003.
- [2] Teymur, M., Chitkara, N. R., Yohngjo, K., Aboudi, J., Pindera, M. J. and Arnold, S. M., "Thermoelastic Theory for the Response of Materials Functionally Graded in Two Directions," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 33, pp. 931–66, 1996.
- [3] Feldman, E. and Aboudi, J., "Buckling Analysis of Functionally Graded Plates Subjected to Uniaxial Loading," *Compos Struct.*, Vol. 38, pp. 29–36, 1997.
- [4] Sankar, B. V., "An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams," *Compos. Sci. Technol.*, Vol. 61, pp. 689–96, 2001.
- [5] Batra, R. C. and Vel, S. S., "Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates," *AIAA J.*, Vol. 40, pp. 1421–33, 2001.
- [6] Zhong, Z. and Shang, E. T., "Three Dimensional Exact Analysis of A Simply Supported Functionally Gradient Plate," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 40, pp. 5335–52, 2003.
- [7] Loy, C. T. , Lam, K. Y. and Reddy, J. N., 1999, "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 41, pp. 309–24
- [8] Yang, J. and Shen, H. S., "Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates," *Compos Struct.*, Vol. 54, pp. 497–508, 2001.
- [9] Woo, J. and Meguid, S.A., "Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 38, pp. 7409–21, 2001.
- [10] Shen, H. S., 2002, "Nonlinear Bending Response of Functionally Graded Plates Subjected to Transverse Loads and in Thermal Environments," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 44, pp. 561–84
- [11] Bailey, T. and Hubbard, J. E., "Distributed Piezoelectric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam," *J. Guidance, Control Dyn.*, Vol. 8, pp. 605–11, 1985.
- [12] Miller, S. E., and Hubbard, J. E., "Observability of a Bernoulli–Euler Beam using PVF2 as a Distributed Sensor," MIT Draper Laboratory Report, (July 1, 1987).
- [13] Ray, M. C., "Optimal Control of Laminated Shells with Piezoelectric Sensor and Actuator Layers", *AIAA J.*, Vol. 41, pp. 1151–7, 2003.
- [14] Dong, S. and Tong, L., "Vibration Control of Plates Using Discretely Distributed Piezoelectric Quasi-Modal Actuators/Sensors", *AIAA J.*, Vol. 39, pp. 1766–72, 2001.