روش‌شناسی علوم قیاسی

«لطف‌الله نبوی»

نگرش کنونی به «روش‌شناسی قیاسی» که به «روش اصل موضوعی» و «روش اگزیوماتیك» (Axiomatic Method) نیز معروف است، حاصل سیر تکاملی اندیشهٔ بشر درطول تاریخ است و یکی از شاهکارهای تفکر انسان و نشانهٔ تعالی اندیشهٔ وی محسوب می‌شود. از آنجاکه این روش را اقلیدس (Euclid) در تألیف کتاب مهم و دورانسازش در ریاضیات، یعنی کتاب اصول هندسه به‌کار گرفت، به «شیوهٔ هندسی» نیز معروف است.

به‌طورکلی، تمامی اطلاعات بشری در قالب قضایا وگزاره‌هایی قابل ارائه است؛ این گزاره‌ها و احکام، خود حاوی مفاهیم وحدودی (terms) هستند. باید توجه داشت که به‌مجموعه‌ای دلخواه از این گزاره‌ها و اخبار «علم» اطلاق نمی‌گردد، بلکه علم، حاوی مجموعه گزاره‌ها و اخباری مرتبط وبه‌هم پیوسته است که دارای سازمان وساختار خاصی باشند.

درهرعلمی تعدادی ازگزاره‌ها و احکام، از احکام دیگر استنباط می‌شود و به عبارت دیگر براساس آنها قابل اثبات و قابل تفسیر است. مثلاً قانون «سقوط اجسام» گالیله (G.Galileo) و قوانین «حرکت سیاره‌ای» کپلر (Kepler)، برمبنای‌قوانین جاذبهٔ‌عمومی و اصول مکانیك نیوتون (Newton) قابل اثبات است. کشف روابط استنتاجی مزبور، از مهمترین و مهیج‌ترین مسائل تاریخ علم فیزیك محسوب می‌شود. همچنین در تمامی‌علوم، مفاهیم و حدودی که اجزای تشکیل‌دهنده احکام و گزاره‌ها هستند، براساس حدود دیگری تعریف می‌شوند. به‌عنوان مثال، وزن مخصوص به «وزن واحد حجم» و مثلث به «شکل سه‌ضلعی» تعریف می‌شود. تعریف بعضی‌حدود توسط حدود دیگر واثبات و استنتاج حکمی

(Statement) از احکام‌دیگر، از مهمترین ویژگیهای تفکر علمی محسوب می‌شود. کمال مطلوب‌آن است که تمامی حدود مورد استفاده یك علم، تعریف شود و تمامی احکام آن علم، اثبات‌گردد؛ ولی متأسفانه هیچیك از موارد فوق ممکن نیست؛ زیرا، در تعریف‌هر حدی، حدی‌دیگر و درتعریف‌حدود اخیر نیز حدود دیگری لازم‌است تا بی‌نهایت. این‌امر یا به‌سلسلهٔ بی‌پایانی از تعاریف (تسلسل)، ویا به‌تعاریف «دوری» می‌انجامد. همچنین، برای اثبات هرحکمی، حکمی دیگر و برای اثبات احکام اخیر نیز احکام دیگری لازم است تا بی‌نهایت، که این نیز به‌دور یا تسلسل می‌انجامد. پس چاره‌ای جزاین نیست‌که‌پاره‌ای حدود را بدون تعریف وپاره‌ای احکام را نیزبدون اثبات بپذیریم. این حدود و احکام‌اولیه در اصطلاح ریاضیدانان، منطقدانان و فلاسفهٔ مسلمان به‌ترتیب به «مبادی تصوری» و «مبادی تصدیقی» مشهورند. مبادی تصوری یك علم، حاوی حدود اولیهٔ تعریف‌ناشده،و مبادی تصدیقی‌آن، شامل‌احکام اثبات‌ناشده است. مبادی تصدیقی، خود به‌«اصول‌متعارفه» (Axioms) و «اصول موضوعه» (Postulates) تقسیم می‌شود:

- مبادی علم
  - تصوری
  - تصدیقی
    - اصول متعارفه
    - اصول موضوعه

تقسیمبندی اصول به «متعارفه» و «موضوعه» بـرای اولین‌بـار در کتاب معروف «ارسطو» (Aristotle) به‌نام ارگانون (Organon) دیده می‌شود. ارسطو می‌نویسد:

«هر علم استدلالی (علم برهانی) باید بر پایهٔ اصول غیرقابل استدلال بنا شود وگرنه مراحل استدلال، بی‌پایان خواهد بود. از این اصول غیرقابل استدلال، برخی در همهٔ علوم مشترکند و برخی دیگر خاص یا مختص به‌یك علم خاص می‌باشند. گروه اول یا اصول مشترك، همان اصول متعارفی هستند کـه به‌طور معمول با اصل متعارف نمایش داده می‌شوند کـه چنانچه از دو مقدار مساوی، مقادیـر مساوی کم‌کنیم، باقیمانده‌ها، مساوی خواهند بود. در گروه دوم، نخست بـا جنس یا موضوع موردنظر سروکار داریم‌که وجود آن، باید پذیرفته شود.»

اقلیدس‌نیز درکتاب اصول هندسه از همین‌ترتیب ارسطوتبعیت نموده و احکام اولیهٔ

هندسهٔ مسطحه را به‌دو گروه اصول متعارفه و موضوعه تقسیم می‌کند. امروزه دانشمندان تفاوت چندانی بین اصول موضوعه و اصول متعارفه قائل نیستند وهردو را تقریباً مترادف دانسته، با لفظ واحد «اصل موضوع» از آنها یاد می‌کنند.

در استفاده از شیوهٔ اصل موضوعی باید به‌این نکات مهم، کاملاً توجه کرد:

۱- هیچ حدی را نباید پذیرفت مگر اینکه معنی آن صریحاً توسط حدود اولیه و یا حدودی که قبلاً تعریف شده است، تعریف شود.

۲- هرگزاره وحکمی غیر از اصول موضوعه درصورتی صادق و پذیرفتنی است که یا براساس اصول موضوعه اولیه ویا احکام اثبات شدهٔ قبلی اثبات شود.

هرگزاره و حکمی از علم که بدین شیوه اثبات شود، یک «قضیه» (theorem) نامیده می‌شود.

ویژگیهای نظام قیاسی

الف) سازگاری (Consistency)

یک نظام و دستگاه قیاسی، وقتی ناسازگار (inconsistent) است که اصول موضوعه و قواعد استنتاجی دستگاه به تناقض (Contradictory) بینجامد؛ یعنی دو نتیجهٔ کاملاً متناقض را دربر داشته باشد ودرصورت عدم وجود چنین تناقضی، دستگاه، سازگار است.

اهمیت سازگاری درنظام قیاسی ازآن‌روست که اگر یک‌تناقض در دستگاه رخنه کند، آن دستگاه به‌تمامی از ارزش خواهد افتاد؛ به‌عبارت دیگر حتی اگر تمامی صفات وجهات لازم دیگر برقرار بماند و در عین‌حال دستگاه متضمن تناقضی باشد، آن دستگاه از اعتبار می‌افتد.

نکتهٔ قابل تذکر این است که اثبات سازگاری نظامهای قیاسی به سادگی صورت نمی‌گیرد و تاکنون سازگاری تعداد معدودی از اینگونه دستگاهها به‌اثبات رسیده است (مثل حساب گزاره‌ها و حساب محمولات در منطق‌جدیدوهندسهٔ‌مسطحه در ریاضیات). یکی از شیوه‌های اثبات سازگاری دستگاههای قیاسی آن است که اصول موضوعه، در یک‌نمونه از دستگاه قیاسی، جملگی صادق باشند. در این صورت قضایای دستگاه که نتایج منطقاً ضروری اصول موضوعه هستند، همگی صادقند و در نتیجه، دستگاه سازگار خواهد بود.

ب) استقلال (independence)

از ویژگیهای مهم یك نظام قیاسی مطلوب، استقلال حدود و اصول موضوعـهٔ آن است؛ یعنی چنان باشدکه هیچیك از این اصول موضوعه را نتوان از روی اصول موضوعهٔ دیگر استنتاج کرد. درصورتی می‌توان به‌استقلال اصول موضوعهٔ دستگاهی حکم کردکه استنتاج هرکدام از اصول موضوعه از روی بقیه منطقاً محال باشد؛ به‌عبارت دیگـر، تـأسیس آن دستگاه بر مبنای تعدادکمتری از اصول موضوعه ممتنع باشد؛ همچنین دستگاهی از حدود اولیه، وقتی دارای استقلال است کـه هیچیك از حدود اولیه را نتوان بـرحسب سایـر حدود تعریف کـرد. بنابراین اگر بتوان یکی از اصول موضوعهٔ دستگاه را از دیگر اصول استنتاج کرد، چنین اصل موضوعی زاید است و دارای استقلال نیست. امـا اگـر تاکنون هیچیك ازاصول موضوعه از بقیهٔ اصول استنتاج نشده بـاشد، منطقاً نمی‌توان بـه امتناع چنین استنتاجی و درنتیجه، استقلال دستگاه حکم کرد.

باید به این نکته نیز توجـه داشت که ساخت و تشکیل یك دستگاه قیاسی بر پایـهٔ بنیادی‌ترین حدود، اصول و قواعد استنتاجی و حذف حدود و اصول زاید و اضافی، غالباً اثبات قضایا و احکام را در دستگاه مزبور بسیار دشوار می‌سازد. از این‌رو استقلال‌اصول موضوعه و حدود اولیه وقواعـد استنتاجی در مقام آموزش و تعلیم چندان مورد توجـه نیست؛ ولی درمقام تأسیس یك دستگاه کاملاً ضروری است؛ به‌عبارت دیگر استقلال‌حدود و اصول موضوعه وقواعد استنتاج ارزش نظری دارد، نه‌ارزش عملی.

ج) تمامیت (Completness)

خصوصیت مهم دیگر دستگاه قیاسی، تمامیت آن است. منظور از تمامیت، آن است کـه بتوان هرگزاره‌ای را از دستگاه مزبور (گزاره‌ای‌که براساس حدود وعلائم دستگاه ساخته مـی‌شود کـه اصطلاحـاً بـه آن «فـرمـول خـوش ساخت» یـا زنجیـره درست ساخت «Well Formed Formula = WFF» می‌گویند)، اثبات یا ابطال کرده،ونسبت به آن داوری کرد. هرقدر تعداد احکام قابل بررسی در یك دستگاه بیشتر باشد؛ ارزش آن دستگاه بیشتر است.

اهمیت تمامیت ازآنجا روشن می‌شودکه ما فرض‌کنیم دستگاهی ناسازگار است. از آنجاکه دستگاه تمامیت ندارد و اثبات یا رد پاره‌ای احکام در دستگاه مزبور میسر نیست؛ در نتیجه، نسبت به‌صدق یاکذب آن احکام، به‌طور قطعی نمی‌توان داوری کرد؛ بنابـراین

وجود تناقض و ناسازگاری در دستگاه مذکور، هیچگاه قابل تحقیق نخواهد بود.

برخلاف یك دستگاه ناسازگار که خالی ازفایده و کاملاً بی‌ارزش است؛ دستگاههای ناتمام، به‌شرط سازگاری دارای ارزش هستند. مثلاً دستگاه قیاسی هندسهٔ اقلیدسی، بدون اصل موضوع پنجم (درباب خطوط متوازی) همانگونه که خواهدآمد دستگاهی ناتمام‌است، اما بدون این اصل موضوع نیز می‌توان برخی خواص اشکال هندسی راکه مستقل ازاصل موضوع مزبورند مورد تحقیق قرار داد و اثبات کرد.

کاربرد روش قیاسی (اصل موضوعی) در علوم

ریاضیات

هندسهٔ اقلیدسی اولین علمی بودکه به‌شیوهٔ قیاسی بنا شد ومتأسفانه بیست‌ودو قرن طول کشید تا این شیوه در دیگرشاخه‌های ریاضیات نیز استفاده شد. کتاب «اصول هندسه» اقلیدس بی‌شك یکی از مؤثرترین و الهام‌انگیزترین کتابها در طول تاریخ بوده است.

هندسهٔ اقلیدسی با چند تعریف و حدود اولیه (مبادی تصوری) وچندگزارهٔ بنیادی (مبادی تصدیقی) آغازمی‌شود. حدودی همانند «جزء»، «طول» و «عرض» تعریف‌نشده‌اند و از مبادی تصوری دستگاه هندسی اقلیدس به شمار می‌روند. تعریفهای مورد نیاز دیگر، براساس حدود اولیهٔ فوق، به‌دست می‌آیند؛ مثلاً :

ـ نقطه آن است‌که جزء ندارد.

ـ خط، طول بدون عرض است.

هریك از تعریفهای مذکور به‌نوبهٔ خود می‌تواند درتعریف حدود دیگر به‌کار گرفته شود. اقلیدس مجموعاً ۲۳ تعریف را در مجموعهٔ دستگاه هندسی خویش به کار می‌گیرد.

گزاره‌ها و احکام بنیادی دستگاه هندسهٔ اقلیدسی ده حکمندکه به دو گروه اصول متعارف و اصول موضوعه تقسیم می‌شوند.

اصول متعارفهٔ هندسهٔ اقلیدسی مجموعهٔ اصولی است که متعارف همه اذهان است و همه مردم مفاد آنها را می‌پذیرند. این اصول عبارتند از:

اصل متعارف ۱ : مقدارهای مساوی با یك مقدار، بایکدیگر مساویند.

» ۲ : اگر به‌مقادیر مساوی، مقادیرمساوی بیفزاییم، دومقدار مساوی به‌دست می‌آید.

» ۳ : اگر از مقادیر مساوی، مقادیر مساوی بکاهیم، دومقدارمساوی

به‌دست می‌آید.

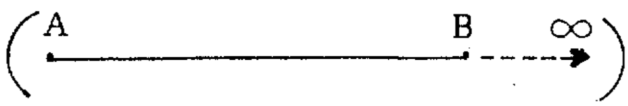
اصل متعارف ۴ : چیزهایی که منطبق برهمند، باهم مساویند.

» ۵ : یك کل از هریك از اجزای خود بزرگتر است.

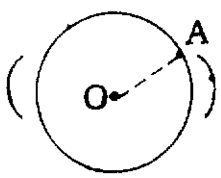
اصول موضوعـهٔ هندسهٔ اقلیدسی مجموعهٔ اصولی است که بدون این کـه ضرورتاً متعارف همهٔ اذهان باشند، به‌عنوان «پایه» تلقی‌شده‌اند. این اصول عبارتند از:

اصل موضوع ۱ : فقط یك خط می‌توان رسم کرد که از دو نقطهٔ معین بگذرد.

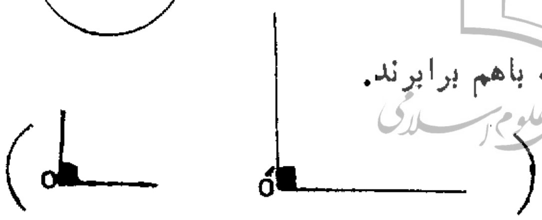
اصل موضوع ۲ : خط مستقیم را می‌توان تا بینهایت امتداد داد.



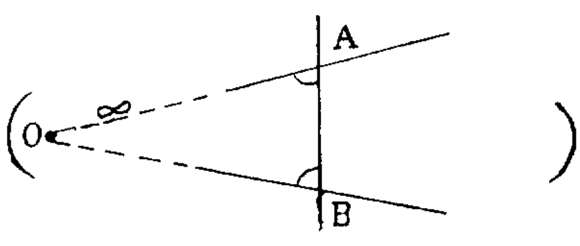
اصل موضوع ۳ : به‌هر مرکز و با هرفاصله می‌توان دایره‌ای رسم کرد.



اصل موضوع ۴ : همهٔ زوایای قائمه باهم برابرند.



اصل موضوع ۵ : اگر خط مستقیمی، دو خط مستقیم دیگر را چنان قطع کند که مجموع دو زاویهٔ داخلی واقع در یك طرف خط قـاطع، کمتر از دو قائمهٔ (۱۸۰°) باشد، در این صورت اگر دو خط مستقیم را تا بینهایت امتداد دهیم، درنهایت‌درطرفی که دو زاویهٔ داخلـی از دو قائمه کمتر است، همدیگر را قطع می‌کنند.

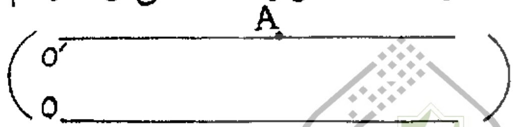


شاهکار فکری اقلیدس از آنجا روشن می‌شود که وی توانست برپایهٔ حدود و اصول فوق، تعداد ۴۶۵ قضیه را منطقاً استنتاج کند. تعداد زیادی از این قضایا بسیار پیچیده‌اند وبا درك مستقیم قابل بررسی و تحقیق نیستند.

مهمترین اصل از اصول موضوعهٔ فوق، اصل پنجم است کـه سرنوشتی شگفت در تاریخ ریاضیات دارد. برخی ریاضیدانان جهت سهولت امر، بیان ساده‌تـری از اصل پنجم به‌دست داده‌اند، که مهمترین آنها «اصل موضوع پلی‌فیر» است کـه در سال ۱۷۹۵ توسط «جان پلی‌فیر» (J Playfair) ارائه گردیـد وبه «اصل موضوع توازی اقلیدسی» مشهور است. البته پیشتر از پلی‌فیر، «پروکلوس» (Proclus، ۴۱۰-۴۸۵ م.) درتاریخ ریاضیات بدان اشاره‌کرده بود.

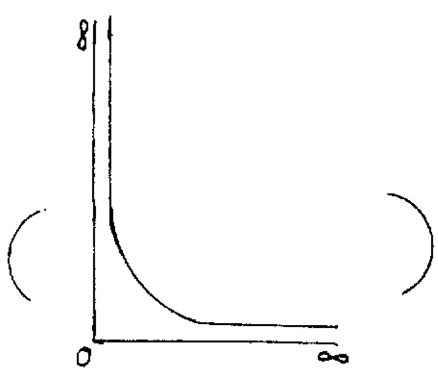
به‌موجب «اصل توازی» که جانشین اصل موضوع پنجم اقلیدس است:

«از نقطه‌ای خارج از یك خط، فقط یك خط به‌موازات آن می‌توان رسم کرد»



«اصل توازی» منطقاً معادل وهـم‌ارز اصل پنجم اقلیدس است و ازآن استنتاج شده است. هندسهٔ اقلیدس توسط ریاضیدانـان دیگـر و به ویـژه توسط «هیلبرت» (Hilbert) ریاضیدان و منطقدان آلمانی کاملتر گردید و مبنای منطقی مستحکم و استواری یافت.

چنان که گفته شد، مهمترین اصل از اصول موضوعه اقلیدس، همین اصل پنجم است. صحت وصدق این اصل اگرچه در طول تاریخ مورد قبول بوده، ولی در همان آغاز مورد انکار وتردید بعضی دانشمندان قرار گرفته و بداهت عقلی آن نیز به زیر سؤال رفته‌است. هندسه‌دانان قدیم با خطوطی آشنا بودند که اگرچه درهیچ محدودهٔ متناهی ازصفحه‌یکدیگر را قطع نمی‌کنند، ولی در بی‌نهایت همدیگر را قطع می‌کنند. به چنین خطوطـی اصطلاحاً «مجانب» اطلاق می‌شد. به‌دلیل مذکور و دلایل عدیدهٔ دیگر، اصل موضوع پنجم، بداهت عقلی لازم را نداشت.



برخی ریاضیدانان معتقدندکه حتی خود اقلیدس نیز چندان اعتمادی به‌اصل مزبور نداشته است. این دانشمندان به‌تأخیرانداختن استفاده ازاصل پنجم را تا قضیهٔ بیست‌ونهم توسط اقلیدس، شاهد براین مدعا می‌دانند.

اولین سؤالی که در ذهن ریاضیدانان به‌وجود آمد این بودکه چه بسا اصل پنجم، مستقل و هم‌عرض اصول دیگر نباشد و همانند یک قضیه به طور منطقی از بقیهٔ اصول استنتاج شود.آیا می‌توان چنین برهانی‌را برای‌اثبات اصل‌توازی، براساس اصول‌موضوعه دیگر بیان کرد؟ برای اثبات اصل توازی، مبارزه‌ای طولانی در تاریخ هندسه درگرفت و برخی ریاضیدانان، تمام عمر خود را در این راه صرف کردند. کوششهای بطلمیوس (Ptolemy)، پروکلوس، خواجه نصیرالدین طوسی ، والیس (Valis) ، ساکری (Saccheri) و لامبرت (Lambert) در اثبات اصل توازی بسیار قابل‌اهمیت است. اینان به زعم خود راه‌حلهایی یافته بودند، ولی همچنانکه در قرن بیستم اثبات گردید، تمام این تلاشها بی‌ثمر بود و راه‌حلهای مزبور، ناخودآگاه «سفسطه و مغالطه‌ای» منطقی را دربرداشته است. دراین میان، تحقیقات «ساکری» نقطهٔ عطفی درتاریخ ریاضیات به‌شمار می‌آید. وی کوشید ازطریق برهان‌خلف (Ad-Absurdum) به‌اثبات‌اصل‌توازی بپردازد. وی نقیض اصل‌پنجم را، اصل‌موضوع قرار داد و کوشید بااین اصل موضوع جدید و چهار اصل موضوع‌دیگر، تناقضی را در دستگاه بیابد. اگر وی به‌چنین کاری موفق می‌شد، اصل توازی منطقاً اثبات می‌شد؛ اما او به‌انجام این امر توفیق نیافت ولی در این راه به‌نتایج خارق‌العاده وغیر موافق با مشهودات هندسی (ونه‌منطقاً محال)رسید. البته «ساکری» این نتایج‌را نامعقول و محال می‌دانست وبه‌زعم خود دراثبات اصل توازی توفیق یافته بود؛ درحالی‌که اگر بادقت‌نظر منطقی ملاحظه می‌شد، این‌نتایج محال، ممتنع و نامعقول نبود وصرفاً با مشاهدات هماهنگی نداشت.

ساکری اگرچه به اثبات اصل توازی توفیق نیافت ولی این فکر را در اذهان دانشمندان برانگیخت که چه‌بسا ممکن است اصل موضوع پنجم مستقل باشد و از دیگر اصول، قابل‌استنتاج نباشد. محال‌وممتنع بودن استنتاج اصل موضوع پنجم از دیگراصول، درنیمهٔ‌دوم قرن‌نوزدهم وبالاخص‌با رشد وگسترش‌منطق‌جدید (منطق ریاضی)اثبات گردید.

باکوششهای گوس (Gauss)، بولیایی(Bolyai)، لوباچفسکی (Lobachevsky) و ریمان (Riemann) ثابت شدکه استنتاج اصل توازی از دیگر اصول غیرممکن است. این‌نتیجه، مهمترین اثرنظری را درتاریخ ریاضیات برجای‌گذاشت؛ زیرا با اثبات‌استقلال

اصل‌موضوع پنجم، تغییر این اصل وجایگزینی آن با اصول جدیدتر، دستگاه هندسه را به تناقض دچار نمی‌ساخت. توضیح اینکه، اگر اصل پنجم از دیگر اصول قابل استنتاج بود، تعویض این اصل و جایگزینی اصل دیگری به‌جای آن، دستگاه قیاسی را دچار تناقض و ناسازگاری می‌کرد و بااثبات استقلال این اصل، دیگربرای ظهور هندسه‌های غیراقلیدسی منطقاً مانعی وجود نداشت.

جستجوی اصل‌موضوعی که بتواند جایگزین اصل‌توازی شود، جرج فردریش‌ریمان ریاضیدان آلمانی ونیکلای لوباچفسکی را برآن داشت که در دوجهت مخالف، به‌ساخت و تشکیل هندسه‌های غیر اقلیدسی اقدام کنند.

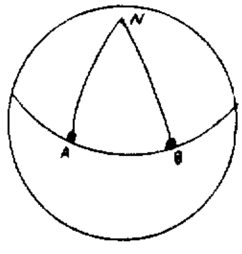
«ریمان» اصل موضوع پنجم را به‌اصل موضوع زیر تبدیل نمود:

«از نقطه‌ای خارج از یک خط، هیچ خطی بـه موازات آن نمی‌توان رسم کرد.»

و «لوباچفسکی» اصـل موضوع پنجم را در جهتی کاملاً مخالف ریمان، به صورت زیـر بیان کرد:

«ازنقطه‌ای خارج از یك خط بیش از یك‌خط (تا بی‌نهایت) می‌توان به‌موازات آن رسم کرد.»

مدل‌ریمان به«هندسهٔ بیضوی» ومدل لوباچفسکی به«هندسهٔ هذلولی» مشهوراست. برای درك مدل ریمان، می‌توان کره‌ای مثل کـرهٔ زمین را درنظرآوردکه دونصف النهار آن درعین‌حال‌که برخط استوا عمودند، درقطب، همدیگر را قطع می‌کنند.



هندسه‌های غیر اقلیدسی (بیضوی، هذلولی) در مقایسه بـا هندسهٔ اقلیدسی، نتایج بسیار متفاوتی را به‌دست می‌دهند، که برخی از آنها در جدول زیـر بـه‌طور خلاصه ذکر شده‌است.

نسبت محیط به‌قطر دایره	مجموع زوایای مثلث	تعداد خطوط متوازی	نوع هندسه
$\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} < \pi$	 $> ۱۸۰^\circ$	۰	ریمانی (بیضوی)
$\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \pi =$ ۳٫۱۴	 $= ۱۸۰^\circ$	۱	اقلیدسی
$\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} > \pi$	 $< ۱۸۰^\circ$	∞	لوباچفسکی (هذلولی)

آنچه دراینجا لازم به‌تذکر است، این است که تمامی هندسه‌های اقلیدسی وغیراقلیدسی (ریمانی-لوباچفسکی) از جهت منطقی، کاملاً سازگارند و همگی به‌شیوهٔ قیاسی (اصل موضوعی) بنا شده‌اند. بنابراین همگی دارای اعتبار و حجیت منطقی یکسانی هستند و در نتیجه، با استناد و توسل به‌یکی، دیگرنظامها را نمی‌توان غیرمعتبرتلقی کرد.

درباب استفاده وکاربرد هندسه‌های مذکوربایدگفت درفضاهای معمولی و عادی که انسان با ابعاد بزرگی روبرونیست، می‌توان ازهندسهٔ اقلیدسی به‌عنوان ابزارکاملاً موفقی درمهندسی ومعماری استفاده‌کرد؛ اما هندسهٔ اقلیدسی، درابعادکیهانی ونجومی، ابزارمناسبی نیست؛ دراین‌حالت هندسه‌های غیراقلیدسی ابزارهای مناسبتری هستند.

استفاده از روش اصل موضوعی در دیگرشاخه‌های ریاضیات (غیراز هندسه) بسیار متأخراست. بیست ودوقرن طول‌کشید تا این روش در رشته‌های دیگر ریاضیات وارد شد.

ژوزف پئانو (peano .J) دانشمند ایتالیایی در نیمهٔ دوم قـرن نوزدهم موفق شد علم حساب را اصل موضوعی‌کند واین علم راکه تا آن زمان برپایهٔ مشهودات و بدیهیات

عرفی استواربود، برپایهٔ منطق استوارسازد. حدود اولیهٔ یا مفاهیم بنیادی درنظام پئانو عبارتند از:

ح ۱: صفر (۰)

ح ۲: مجموعه اعداد صحیح (...، ۴، ۳، ۲، ۱)

ح ۳: تالی

بقیهٔ حدود و تعاریف بر پایهٔ حدود اولیهٔ مذکور تعریف می‌شوند. اصول‌موضوعه دستگاه پئانو درتأسیس علم حساب عبارتند از:

اصل موضوع ۱: صفرعدد صحیح است.

اصل موضوع ۲: تالی عدد صحیح، عدد صحیح است.

اصل موضوع ۳: تالیهای اعـداد صحیح متمایز، متمایزند (هیچ دو عـددی تالی واحد ندارند).

اصل موضوع ۴: صفر، تالی هیچ عدد صحیحی نیست.

اصل موضوع ۵: هرخاصیتی‌که به‌صفرمتعلق است ونیزمتعلق باشد بـه‌تالی هرعدد صحیحی‌که دارای این خاصیت (متعلق بودن بـه‌صفر) است، متعلق بـه‌همه اعداد صحیح خواهد بود.

کوششهای ریاضیدانان درنیمهٔ اول قرن‌بیستم،موجب شدکه حداقل اصول موضوعه لازم برای تأسیس هریك ازشعب ورشته‌های ریاضیات، با دقت تعیین شود.

منطق

ازآنجاکه هردستگاه قیاسی مبتنی برمنطق است،از اواخرقرن نوزدهم دانشمندان به‌تأسیس علم منطق به‌روش اصل موضوعی پرداختند. این‌کاربا «فرگه» (Frege) و «پئانو» آغاز شدوسپس‌توسط‌برتراندراسل (B. Russell) وآلفردنورث‌وایتهد(A. N. Whitehead) تکمیل‌گردید. بعد از آن منطقیون در تنقیح بنای قیاسی و اصل موضوعی منطق،گامهای مهمی بـرداشتند. اولین‌کوشش دراصل موضوعی نمودن منطق در بخش حساب گزاره‌هـا (propositional Calculus) صورت‌گرفت.فرگه‌درسال ۱۸۷۹ تعدادی‌اصول‌موضوعه را درتأسیس حساب‌گزاره‌ها پیشنهاد کرد. اما اولین طرح جامع «حساب‌گزاره‌ها»، توسط «راسل» و «وایتهد» درکتاب معروف «اصول ریاضیات» ارائه شد. این دستگاه قیاسی را با توجه به‌کتاب مزبور، به‌اختصاردستگاه (PM) می‌نامند. اصول‌موضوعه حساب‌گزاره‌ها

براساس دستگاه PM عبارتند از:

1. $(p \vee p) \supset p$
2. $p \supset (p \vee p)$
3. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
4. $(p \supset q) \supset [(r \vee p) \supset (r \vee q)]$
5. $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$

درسال ۱۹۲۶ «برنیز» (Bernays) ثابت کرد که اصل موضوع پنجم دستگاه (PM) استقلال ندارد. ازاین‌رو درسال ۱۹۵۰، هیلبرت (Hilbert) وآکرمان (Ackermann) در کتاب معروف اصول‌منطق‌ریاضی دستگاه (PM) را تنقیح کردند وبرمبنای منطقی کاملاً استواری بنا نمودند.

حدود اولیه و نمادهای دستگاه هیلبرت-آکرمان(H. A) عبارتند از:

۱- $p, q, r, s, \ldots$ متغیرهای گزاره‌ای

۲- $\vee, \sim$ ادات فصل ونقض

۳- $(\quad)$ پرانتز

۴- $p, Q, R, \ldots$ فرمولهای دلخواه

بقیهٔ حدود دستگاه، از روی حدود اولیهٔ مذکورساخته‌می‌شوند. مثلاً:

$$(p \cdot Q) \equiv \text{def} \sim(\sim p \vee \sim Q)$$

$$(p \supset Q) \equiv \text{def} \sim p \vee Q$$

$$(p \equiv Q) \equiv \text{def} (p \supset Q) \cdot (Q \supset p)$$

اصول موضوع دستگاه (H.A)، همان ۴ اصل اولیهٔ دستگاه PM است.

نکتهٔ قابل تذکر این است که دستگاههای قیاسی دیگری نیز درحساب گزاره‌ها وجود دارد؛ از آن‌جمله دستگاه رسر (Rosser)، دستگاه نیکود (J. G. P. Nicod)، دستگاه لوکاسیه‌ویچ (J. Lukasiewicz)، و دستگاه هیتینگ (A. Heyting) رامی‌توان نام برد که دستگاه PM و H. A ازمشهورترین آنهاست.

امروزه بخشهای دیگر منطق مثل، حساب محمولات درجهٔ اول (first-order function Calculus) نیز اصل موضوعی گردیده و به‌شیوهٔ قیاسی بنا شده‌است.

روش اصل موضوعی در دیگرعلوم

تأثیر کتاب «اصول هندسهٔ» اقلیدس و روش اصل موضوعی وقیاسی آن تنها درحوزهٔ ریاضیات و منطق خـلاصه نشد، بلکه دیگر عرصه‌های علوم را نیز در برگرفت. شاید بتوان گفت که هیچیك از آثارمکتوب بشری تابدین حد در تفکر علمی بشر تأثیر ننهاده است. اصول هندسهٔ اقلیدس، عملاً منشأ الهام دانشمندان بسیاری درطول تاریخ بوده تا حجیت یقینی راکه درهندسهٔ اقلیدس مشاهده می‌کردند، در دیگرعلوم نیزبرقرارسازند.

ارشمیدس (۲۱۲-۲۸۷ ق. م)، در دوکتاب که به‌منظورتأسیس علم مکانیك نظری تدوین کرد، روش اصل موضوعی اقلیدس را به‌کار گرفت. وی درکتاب اول خود ۱۵ قضیه را به‌کمك ۷ اصل‌موضوع اثبات‌کرد. «اسحاق نیوتون» درکتاب مهم وتاریخی‌خود یعنی کتاب‌اصول‌ریاضی‌فلسفهٔ طبیعی(Mathematical principles of naturalphylosophy) درسال ۱۶۸۶شیوهٔ قیاسی را به‌کارگرفت وعلم مکانیك را برپایهٔ تعدادی اصول موضوعه استوار کـرد. همچنین‌کتاب «بررسی مکانیك تحلیلی» اثر «لاگرانژ» (lagrange) درسال ۱۷۸۸به‌مثابهٔ شاهکاری درتکامل منطقی شناخته شده است.

درعرصه‌های دیگر معرفت همانند «فلسفه» نیـز، روش اصل موضوعی بـا موفقیت به‌کارگرفته‌شده‌است. کتاب‌معروف «اخلاق» اثرمشهور«اسپینوزا»که‌ازمهمترین کتب‌فلسفی مغرب زمین است، به‌شیوهٔ قیاسی و اصل موضوعی تدوین گردیده است. «اسپینوزا» کتاب فلسفی‌دیگری نیزبه‌نام«اثبات اصول‌فلسفهٔ دکارت» به‌شیوهٔهندسی‌نوشته‌است. اسپینوزا در این‌اثر، کتاب معروف «اصول فلسفهٔ» دکارت را به‌شیوهٔ قیاسی تدوین وتنظیم‌نموده‌است.

منابع

۱. اسپینوزا؛ اخلاق، ترجمهٔ دکترمحسن جهانگیری، مرکزنشر دانشگاهی: ۱۳۶۴.
۲. راسل ودیگران؛فلسفهٔ ریاضی(مجموع مقالات)؛نظارت برترجمه ازدکترحسین ضیائی، مرکزایرانی مطالعه فرهنگها: ۱۳۵۹.
۳. کارناپ، ردلف؛ فلسفهٔ علم؛ ترجمهٔ یوسف عفیفی، انتشارات نیلوفر: ۱۳۶۳.
۴. مصاحب، غلامحسین؛ مدخل منطق صورت؛ انتشارات حکمت: چاپ دوم ۱۳۶۶.
۵. ا.ولف، هارولد؛ هندسهٔ نااقلیدسی؛ ترجمهٔ احمد بیرشك، انتشارات امیرکبیر:۱۳۶۲.
۶. گوتنبرگ، ماردین جی؛هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی؛ترجمهٔ م. ه. شفیعیها،مرکز نشر دانشگاهی: ۱۳۶۳.
7. irving Copi; *Symbolic logic*; macmillan publishing: 1979.
8 Carnev-Scheer; *fundameantal of logic*; macmillan publishing: 1980.