

# نظريه اندازه و احتمال

دکتر رامین کاظمی

گروه آمار

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

سرشناسه : کاظمی، رامین، ۱۳۵۷ -  
عنوان و نام پدیدآور : نظریه اندازه و احتمال / رامین کاظمی.  
مشخصات نشر : قزوین: دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، ۱۳۹۷.  
مشخصات ظاهری : ۳۳۸ ص.: نمودار.  
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۵۰۲۴۶-۵-۴  
وضعیت فهرست‌نویسی : فیپا  
یادداشت : کتابنامه.  
یادداشت : نمایه.  
موضوع : احتمالات  
موضوع : Probabilities  
موضوع : حساب انتگرال  
موضوع : Calculus, Integral  
موضوع : اندازه‌گیری -- نظریه  
موضوع : Measure theory  
شناسه افزوده : دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)  
رده‌بندی کنگره : QA۲۷۳/ک۲۵۶ ۱۳۹۷  
رده‌بندی دیویی : ۵۱۹/۲  
شماره کتابشناسی ملی : ۵۳۴۱۷۴۴  
تاریخ درخواست : ۱۳۹۷/۰۶/۰۶

عنوان : نظریه اندازه و احتمال

نویسنده : رامین کاظمی

صفحه‌آرایی : مریم منوچهری

ناظر فنی : حمید کلهر

شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۵۰۲۴۶-۵-۴

نوبت چاپ : نخست ۱۳۹۷

قیمت : ۲۰,۰۰۰ تومان

شمارگان : ۵۰۰ جلد

ناشر : انتشارات دانشگاه بین‌المللی امام خمینی «ره»

قزوین، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، تلفن ۳۳۹۰۱۴۲۶ - ۰۲۸

کلیه حقوق برای ناشر محفوظ است.

مسئولیت حقوقی و قانونی محتوای کتاب بر عهده صاحب اثر است

تقدیم به همسر مهربان  
و  
فرزند دلبندم کیا



## پیشگفتار

کتاب‌های جامع و شاخصی در زمینه‌ی «نظریه اندازه و احتمال» به زبان انگلیسی نوشته شده است که توسط بزرگان و پیشکسوتان این علم در کشور آقایان دکتر محمدقاسم وحیدی-اصل، دکتر عین‌اله پاشا، دکتر بیژن ظهوری‌زنگنه، دکتر احمدرضا سلطانی، دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا و دیگران در دانشگاه‌های دارای دوره‌های تحصیلات تکمیلی از ابتدا تا کنون معرفی و تدریس شده‌اند. این بزرگان ستون‌های محکمی هستند که ساختمان این علم بر اساس زحمات و توانایی‌های آنها بنا شده است. شاید اولین سوالی که امروزه مطرح می‌شود این است که آیا دانشجویان تحصیلات تکمیلی در سال‌های اخیر راه، از لحاظ توانایی، می‌توان با دانشجویان سال‌های نسبتاً دور مقایسه کرد؟ پاسخ به این سوال یقیناً خیر است. اما سوال دیگر اینکه، آیا صرفاً ترجمه‌ی کتاب بدون ذکر جزئیات محاسبه‌ای، در هر شاخه‌ای، به تنهایی برای یادگیری کامل و دقیق آن کفایت می‌کند؟ و یا اینکه آیا زبان فارسی برای علومی چون ریاضی می‌تواند منجر به درک بهتر و عمیق‌تر آن برای مخاطبان فارسی زبان شود؟ بجز ریاضیات مقدماتی به نظر می‌رسد که تنها ترجمه‌ی کتاب‌های ریاضی، برای آندسته از دانشجویانی که کمتر در مفاهیم عمیق می‌نگرند، به افزایش توانایی آنها منجر نمی‌شود. زبان فارسی نیز می‌تواند با قدرتی که در بیان مطالب دارد با توضیح بیشتر در قالبی منطقی به ابزاری برای درک بیشتر و عمیق‌تر ریاضی تبدیل شود. اولین اقدام شایسته در این خصوص انتشار کتاب «نظریه احتمال» توسط استاد دانشمند و برجسته دکتر عین‌اله پاشا بود که از طریق انتشارات دانشگاه تربیت معلم (خوارزمی کنونی) در سال ۱۳۸۶ صورت گرفت. آیا انتشار کتب دیگر در این زمینه با سلاقی نوشتاری متفاوت کار درستی است (البته نویسنده خود را با استادی چون دکتر پاشا مقایسه نمی‌کند)؟ همان‌طور که در زبان انگلیسی تنوع انتشار کتاب در موضوعی واحد، با رویکردهای متفاوت، امری رایج است لذا در زبان فارسی نیز کار اشتباهی به نظر نمی‌رسد.

با این مقدمه، کتاب پیش رو در ده فصل برای مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار تهیه شده است. شاید بتوان ادعا کرد! که رویکرد کتاب با سایر کتب شناخته شده در چندین فصل متفاوت است. در فصل اول، مروری کوتاه بر همگرایی دنباله‌ی توابع صورت گرفته است. در فصل دوم، توابع پله‌ای، حد و انتگرال آنها و

در نهایت انتگرال ریمان معرفی می‌شوند. در فصل سوم، انتگرال ریمان-اشتیلیتس برای درک بهتر انتگرال نسبت به توابع توزیع مرور و خواصی که کاربرد بیشتری در نظریه‌ی احتمال دارند، بیان می‌شوند. در فصل چهارم، سیستم‌های مجموعه‌ای معرفی و مثال‌های نقضی ارائه خواهد شد. در فصل پنجم، نظریه‌ی اندازه و انتگرال لُبگ در حد نیاز معرفی خواهند شد و در فصل ششم، اندازه‌ی احتمال و انواع آن معرفی می‌شوند. در فصل‌های بعدی، با استفاده‌ی کم‌رنگی از نظریه‌ی اندازه، متغیرهای تصادفی، استقلال، امید ریاضی و مفاهیم مختلف همگرایی معرفی می‌شوند. در پایان فصل دهم، برخی قضایای حدی کلاسیک مرور خواهند شد. در انتخاب تمرین‌ها در پایان هر فصل نیز وسواس زیادی صورت گرفته است. در طول کتاب سعی شده است مطالب با ذکر جزئیات بیان شوند. بدون شک خلق هر اثری عاری از خطا و اشتباه نیست لذا از همه‌ی اشخاصی که این کتاب را مطالعه می‌کنند صمیمانه تقاضا می‌شود نظرها و پیشنهادهای خود را به رایانامه‌ی زیر ارسال نمایند.

رامین کاظمی

گروه آمار، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

*r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir*

# فهرست مطالب

## فهرست مطالب

۱	همگرایی دنباله‌ی توابع	۱
۱	۱.۱ همگرایی نقطه‌ای	۱
۴	۲.۱ همگرایی یکنواخت	۴
۷	۳.۱ آزمون $M$ -وایراشتراس	۷
۸	۴.۱ قضیه‌ی دینی	۸
۱۲	۵.۱ تمرین‌ها	۱۲
۱۷	۲ نظریه مقدماتی انتگرال	۱۷
۱۷	۱.۲ تابع پله‌ای	۱۷
۲۰	۲.۲ توابع تنظیم شده: حد یکنواخت یک دنباله از توابع پله‌ای	۲۰
۲۰	۱.۲.۲ خواص جبری توابع تنظیم شده	۲۰
۲۲	۲.۲.۲ خاصیت مشخصه‌ی توپولوژیک توابع تنظیم شده	۲۲
۲۵	۳.۲ انتگرال توابع پله‌ای	۲۵

۲۵	۱.۳.۲	ملاحظات
۳۲	۴.۲	انتگرال توابع تنظیم شده
۳۴	۱.۴.۲	خواص انتگرال توابع تنظیم شده
۳۶	۵.۲	انتگرال ریمان
۴۰	۶.۲	فرمول اول و دوم میانگین
۴۴	۷.۲	تمرین‌ها
۴۷	۳	انتگرال ریمان-اشتیلیتس
۴۷	۱.۳	تعریف و وجود انتگرال
۴۹	۲.۳	انتگرال‌پذیری به سبک ریمان-اشتیلیتس
۵۸	۳.۳	خواص انتگرال
۷۱	۴.۳	همگرایی یکنواخت: انتگرال‌پذیری و مشتق‌پذیری
۷۹	۵.۳	سری‌های فوریه
۸۹	۶.۳	تمرین‌ها
۹۹	۴	سیستم‌های مجموعه‌ای
۹۹	۱.۴	اَعمال مجموعه‌ای
۱۰۴	۲.۴	رده‌های بسته تحت اَعمال مجموعه‌ای
۱۱۱	۳.۴	رده‌های تولید شده
۱۱۵	۴.۴	تمرین‌ها
۱۱۹	۵	نظریه اندازه و انتگرال بُگ
۱۱۹	۱.۵	اندازه



۱۲۴	اندازه‌ی بُگ	۲.۵
۱۳۰	اندازه‌ی بُگ-اشتیلیتس	۳.۵
۱۳۵	نقش معکوس	۴.۵
۱۳۶	توابع اندازه‌پذیر	۵.۵
۱۴۴	انتگرال بُگ	۶.۵
۱۴۵	مشتق رادون-نیکودیم	۷.۵
۱۴۷	تمرین‌ها	۸.۵
۱۵۱	اندازه‌ی احتمال	۶
۱۵۱	تعریف و ویژگی‌ها	۱.۶
۱۵۷	اندازه‌های احتمال بر $\mathbb{R}$	۲.۶
۱۶۶	اندازه‌های حاصل ضرب و قضیه‌ی فوبینی	۳.۶
۱۷۴	تمرین‌ها	۴.۶
۱۷۷	متغیرهای تصادفی	۷
۱۷۷	تعریف	۱.۷
۱۷۸	سیگما میدان‌های تولید شده توسط متغیرهای تصادفی	۲.۷
۱۷۹	تبدیل‌ها	۳.۷
۱۸۱	تقریب متغیرهای تصادفی نامنفی	۴.۷
۱۸۱	قضیه‌های رده‌ی یکنوا برای توابع	۵.۷
۱۸۳	توزیع‌ها و توابع توزیع	۶.۷
۱۸۸	انتگرال‌ها نسبت به توابع توزیع	۷.۷

۱۸۹	انتگرال نسبت به تابع توزیع گسسته	۱.۷.۷
۱۹۱	انتگرال نسبت به تابع توزیع مطلقاً پیوسته	۲.۷.۷
۱۹۳	انتگرال نسبت به تابع توزیع آمیخته	۳.۷.۷
۱۹۴	متغیرها (بردارها) و فرایندهای تصادفی با توزیع‌های معین	۸.۷
۱۹۹	تمرین‌ها	۹.۷

## ۸ استقلال

۲۰۳	تعریف و شرط معادل	۱.۸
۲۰۳	توابعی از متغیرهای تصادفی مستقل	۲.۸
۲۱۰	ساختن متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های مفروض	۳.۸
۲۱۲	استقلال پیشامدها	۴.۸
۲۱۵	استقلال سیگما میدان‌ها	۵.۸
۲۲۱	تمرین‌ها	۶.۸

## ۹ امید ریاضی

۲۲۷	امید ریاضی متغیرهای تصادفی ساده	۱.۹
۲۲۷	امید ریاضی متغیرهای تصادفی نامنفی	۲.۹
۲۳۰	امید ریاضی متغیرهای تصادفی دلخواه	۳.۹
۲۳۷	امید ریاضی متغیرهای تصادفی مختلط مقدار	۴.۹
۲۴۳	امید ریاضی نسبت به اندازه‌ی حاصل ضرب	۵.۹
۲۴۴	محاسبه‌ی امید ریاضی یک متغیر تصادفی	۶.۹
۲۴۵	امید ریاضی تابعی از متغیرهای تصادفی	۷.۹

۲۵۰	۸.۹ امید ریاضی تابعی از بردارهای تصادفی
۲۵۱	۱.۸.۹ امید ریاضی تابعی از متغیرهای تصادفی مستقل
۲۵۴	۹.۹ تابع توزیع مجموع دو متغیر تصادفی مستقل
۲۵۷	۱۰.۹ نابرابری‌ها
۲۶۳	۱۱.۹ تابع مشخصه
۲۶۴	۱۲.۹ تمرین‌ها
۲۷۱	۱۰ همگرایی
۲۷۱	۱.۱۰ انواع همگرایی
۲۷۳	۲.۱۰ ملاک‌های معادل
۲۷۹	۳.۱۰ رابطه‌ی بین صورت‌های مختلف همگرایی
۲۸۴	۴.۱۰ احکام با اعتبار محدود
۲۹۰	۵.۱۰ احکام مربوط به زیر دنباله‌ها
۲۹۴	۶.۱۰ همگرایی تحت تبدیل‌ها
۳۰۰	۷.۱۰ نگاشت‌های پیوسته
۳۰۲	۸.۱۰ همگرایی در $L^p(p \geq 1)$
۳۰۲	۹.۱۰ برخی قضایای حدی کلاسیک
۳۱۸	۱۰.۱۰ تمرین‌ها
۳۲۷	واژه‌نامه